Mécanique

Acoustiques

Analyse de Fourier

Etude de la transformation de Fourier rapide: simulation de l'analyse et de la synthèse de Fourier

Description tirée de CASSY Lab 2

Pour charger des exemples et des paramétrages, merci de bien vouloir utiliser l'aide de CASSY Lab 2.

CASSY Lab 2 (2013-06-07)

Analyse de Fourier de signaux simulés

Description de l'expérience

L'analyse fréquentielle (ou spectrale) est une méthode de travail très courante pour un grand nombre d'applications caractérisées par la survenue de signaux (ou valeurs mesurées) variables en temps. C'est ainsi que, par exemple en acoustique, la connaissance exacte des sons harmoniques d'un son complexe joue un rôle important pour la génération artificielle de sons complexes ou de la langue.

Dans cette expérience, il s'agit d'étudier dans un premier temps la transformée de Fourier de signaux périodiques simples pour ainsi s'initier au thème de la transformation de Fourier. Dans un premier temps, on calculera la transformée de Fourier d'un signal simulé numériquement puis on déterminera les fréquences et les amplitudes correspondantes (analyse de Fourier). Sur la base de cette analyse harmonique, on recompose dans un deuxième temps le signal variable en temps conformément au théorème de Fourier pour le comparer ensuite avec la série de Fourier calculée théoriquement ainsi qu'avec le signal de sortie simulé numériquement (synthèse de Fourier).

Montage expérimental

Remarque : Cette expérience est une expérience de simulation sur l'analyse de Fourier avec CASSY Lab. Pour une expérience avec des signaux électriques de forme correspondante, veuillez vous référer à l'expérience suivante. Les signaux S_1 étudiés dans l'expérience sont générés par les fonctions suivantes :

Triangle :	S_1 = 4*(1-2*saw(f*t))
Rectangle :	S_1 = 4*(2*square(f*t)-1)

avec la fréquence f = 0,5 Hz.

Remarques sur la transformation de Fourier

Un signal S_1 continu qui dépend du temps est échantillonné à des instants précis lors de la mesure assistée par ordinateur. De cette manière, on obtient un signal numérisé qui peut être traité ultérieurement avec les méthodes traditionnelles du traitement numérique des signaux (amélioration du rapport signal/bruit par transformation de Fourier, lissage du signal par le calcul de la moyenne, etc.). Le théorème d'échantillonnage renseigne sur l'intervalle de temps à considérer pour une mesure de la valeur du signal afin que l'allure temporelle du signal puisse à nouveau être déterminée à partir des valeurs mesurées numérisées (points de données). Pour une numérisation du signal avec un nombre suffisant de points de données, la fréquence d'échantillonnage f_s doit être au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale f_{max} qui survient dans le signal et détermine la largeur du spectre de fréquence. si la numérisation du signal a eu lieu avec une fréquence d'échantillonnage f_s trop faible, la forme du signal n'est alors plus saisie (aliasing). La fréquence d'échantillonnage f_s du signal de mesure est définie dans les paramètres de mesure (**Fenêtre → Visualiser les paramètres de mesure**) par l'intervalle réglé $\Delta t=1/f_s$.

Le théorème de Fourier nous dit qu'on peut transformer un signal périodique S_1 quelconque, variable dans le temps, en une somme pondérée de fonctions en termes de sinus et de cosinus. Pour la fonction triangle ou carrée utilisée dans l'expérience, on a comme développement en série de S_1 obtenu d'après des fonctions trigonométriques jusqu'au neuvième ordre :

Triangle :

S_3 = 4*8/3.14^2 * (cos(360*f*t) + 1/9*cos(360*3*f*t) + 1/25*cos(360*5*f*t) + 1/49*cos(360*7*f*t)) + 1/81*cos(360*9*f*t)

Rectangle :

S_3 = 4*4/3.14 * (sin(360*f*t) + 1/3*sin(360*3*f*t) + 1/5*sin(360*5*f*t) + 1/7*sin(360*7*f*t) + 1/9*sin(360*9*f*t)

La fonction S_1 temporelle correspond ainsi à un spectre de fréquence discret avec différentes amplitudes. La généralisation de cette décomposition à des signaux non-périodiques aboutit à l'intégrale de Fourier qui assigne un spectre de fréquence F_1 au signal variable dans le temps S_1.

Le calcul numérique du spectre de fréquence F_1 est particulièrement efficace si on prend pour base un signal numérisé de $N=2^p$ points de données. Les multiplications complexes N^2 sont remplacées par des additions complexes $N \cdot \log2(N)$. Cet algorithme nettement plus rapide est appelé Transformation de Fourier rapide (FFT).

C'est avec cet algorithme que CASSY Lab calcule le spectre de fréquence F_1. Les points de mesure existants sont tout d'abord pondérés de sorte que les non périodicités marginales ne jouent plus un grand rôle (au bord avec 0, au milieu maximum, pondération de Kaiser-Bessel (4.0)). Pour qu'il y ait toujours exactement 2^p points de mesure, des points de mesure éventuellement manquants sont compensés par des zéros.

En résultat de la FFT, CASSY Lab montre au total N/2+1 amplitudes réelles (les différences de phase ne sont donc pas évaluées). Ces amplitudes sont représentées « surélevées », soit $A_i := A_{i-1} + A_i + A_{i+1}$ afin que les amplitudes de pics aigus correspondent à peu près à la théorie. Sans cette « surélévation », il faudrait calculer la somme de toutes les amplitudes d'un pic pour la détermination d'une amplitude telle qu'elle est réalisée dans cette expérience.

Lors de l'utilisation de la FFT pour l'analyse fréquentielle fait intervenir deux relations fondamentales. La première relation relie la fréquence maximale f_{max} encore analysable à la fréquence d'échantillonnage f_s :

$f_{max} = f_s/2$.

Chaque fréquence supérieure à f_{max} apparaît dans le spectre de fréquence entre zéro et f_{max} et ne se distingue donc plus des parts de fréquence effectivement entre 0 et f_{max}. Le changement ainsi occasionné de la forme du signal (distorsion) est connu sous le nom d'aliasing.

La deuxième relation relie la résolution du spectre de la fréquence Δf (= distance entre les points avoisinants du spectre de fréquence) à la fréquence d'échantillonnage f_s :

$\Delta f = f_{max}/(N/2) = f_s/N = 1/\Delta t/N = 1/T$

avec $T = N\cdot\Delta t$.

Cela signifie qu'une augmentation de la résolution du spectre de fréquence ne peut être obtenue que par une prolongation du temps de mesure.

Procédure expérimentale

- Charger les paramétrages
- Utiliser la souris pour ajuster l'aiguille de l'instrument d'affichage Fréquence f sur la fréquence souhaitée.
- simule le relevé des valeurs mesurées de la fonction S_1. La simulation dure 50 s et relève 500 valeurs (Δt = 100 ms).

Des temps d'enregistrement plus longs augmentent pas à pas la résolution en fréquence de la FFT tandis que des temps d'enregistrement plus courts la diminuent.

Exploitation

Le graphe $S_1(t)$ du signal simulé numériquement apparaît déjà pendant la simulation du relevé des valeurs mesurées. Après la simulation, la transformée de Fourier F_1 est disponible dans le graphe **Spectre de fréquence**.

Le spectre de fréquence présente des pics pour des multiples impairs de la fréquence du signal f réglée, donc pour f, 3*f, 5*f, 7*f, etc. Les amplitudes des pics peuvent être relevées par clic sur la courbe ou bien restituées par l'affichage des coordonnées.

Pour l'analyse, inscrire maintenant les 5 premières amplitudes sous forme de facteurs devant les fonctions sin(360*n*f*t) dans les paramétrages A1, A3, A5, A7 und A9. L'allure temporelle des différents termes A_1, A_3, A_5, A_7 et A_9 est restituée dans le graphe **Analyse de Fourier**.

Dans le graphe **Synthèse de Fourier,** la série $S_2 = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9$ déterminée expérimentalement est comparée avec la série de Fourier S_3 déterminée théoriquement et la fonction S_1 simulée numériquement. Il s'avère que dans les applications pratiques, un polynôme trigonométrique S_2 ou S_3 avec peu de termes permet une bonne approche du signal périodique S_1.