

Oscillations libres

Relevé et exploitation avec CASSY

Objectifs expérimentaux

- Relevé de l'amplitude d'un pendule de torsion en fonction du temps.
- Détermination du coefficient d'amortissement.
- Étude du passage du régime pseudo-périodique (faiblement amorti) au régime critique puis au régime aperiodique.

Notions de base

Les oscillations et les ondes jouent un rôle important dans la nature comme dans le monde technologique. De ce fait, l'étude des phénomènes associés doit comporter une approche expérimentale et une approche théorique, toutes deux favorables à la compréhension des modèles standards et des lois fondamentales de la physique.

Les oscillations de torsion représentent certes un cas particulier des oscillations mécaniques mais elles permettent quand même une analyse approfondie des principaux phénomènes.

La présente expérience est consacrée à l'étude des oscillations libres plus ou moins amorties.

La grandeur physique qui décrit entièrement l'état du système à l'instant t donné est l'angle de déviation $\varphi(t)$ par rapport à la position d'équilibre ou de repos ($\varphi = 0$).

L'action exercée par le ressort spiral sur le pendule est donnée par la loi de Hooke :

$$M_f = D \cdot \varphi(t) .$$

D est ici la constante de raideur et M_f la force de rappel que le ressort exerce sur le pendule.

Un couple mécanique est également exercé sur le pendule par le frein à courants de Foucault :

$$M_r = k \cdot \dot{\varphi}(t) .$$

k est ici le coefficient de frottement et $\dot{\varphi}(t)$ la première dérivée temporelle de l'angle de déviation, soit la vitesse angulaire.

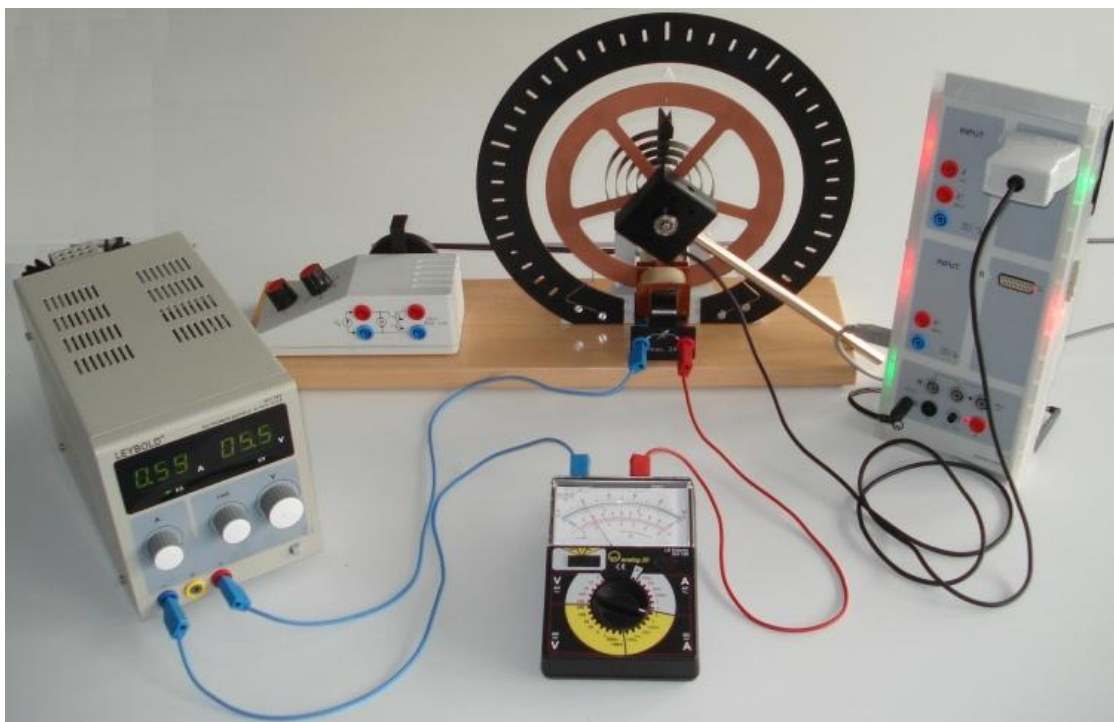


Fig. 1 Montage expérimental pour l'étude des oscillations libres avec amortissement

Matériel

1 pendule de Pohl.....	346 00
1 alimentation CC 0...16 V/0...5 A.....	521 545
1 Sensor-CASSY 2.....	524 013
1 capteur de rotation S.....	524 082
1 CASSY Lab 2.....	524 220
1 multimètre LDanalog 20.....	531 120
1 câble d'expérimentation, 100 cm, bleu.....	500 442
1 câbles d'expérimentation, 100 cm, rouge/bleu, paire.....	501 46
1 PC avec Windows XP/Vista/7/8	

Remarque de sécurité

Tenir compte du courant maximum admissible par l'électro-aimant du frein à courants de Foucault :
 $I_{max} = 1 \text{ A}$ (temporairement 2 A)

La somme de ces deux couples donne le couple total négatif (puisque opposé)

$$-M_g = M_f + M_r$$

pour lequel on a selon Newton :

$$M_g = I \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

I est ici le moment d'inertie du pendule et $\ddot{\varphi}(t)$ l'accélération angulaire.

Il s'ensuit :

$$I \cdot \ddot{\varphi}(t) + k \cdot \dot{\varphi}(t) + D \cdot \varphi(t) = 0. \quad (1)$$

L'équation (1) est l'équation du mouvement qui décrit l'oscillation libre amortie. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, homogène, commune du deuxième ordre dont la solution est claire et connue.

Afin de clarifier les formules, on recourt aux grandeurs suivantes :

- Coefficient d'amortissement

$$\delta = \frac{k}{2I}$$

- Fréquence propre du pendule non amorti

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}$$

- Fréquence du pendule amorti

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

(existe seulement pour $\omega_0 > \delta$).

Tant sur le plan mathématique que physique, on distingue trois cas différents :

Régime pseudo-périodique $\delta < \omega_0$

L'amortissement est faible. Dans ce cas, la solution générale de l'équation (1) est de la forme :

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t). \quad (2)$$

Les constantes A et B sont définies par les valeurs spécifiées pour l'angle initial $\varphi(0) = \varphi_0$ et la vitesse angulaire initiale $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$. On obtient ainsi :

$$A = \varphi_0 \text{ et } B = \left[\frac{\dot{\varphi}_0 + \varphi_0 \cdot \delta}{\omega} \right].$$

Il découle de l'équation (2)

que l'amplitude diminue exponentiellement avec le temps du facteur $e^{-\delta t}$, c.-à-d. qu'elle est réduite de moitié au bout de la période $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\delta}$

et que le rapport d'amortissement entre deux amplitudes successives est constant et exprimé par $q = \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = e^{-\delta T}$.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ est ici la période de l'oscillation amortie. L'exposant

$$\Lambda = \delta \cdot T = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \ln \frac{1}{q}$$

est qualifié de décrément logarithmique.

Régime critique ou cas limite apériodique $\omega_0 = \delta$

Dans le cas d'un amortissement suffisamment important, le retour à l'équilibre du pendule dévié se fait rapidement et sans oscillation, c.-à-d. que le pendule reste à sa position d'équilibre. Dans ce cas-là, la solution générale de l'équation (1) s'écrit

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \cdot (A + B \cdot t) \quad (3)$$

avec les constantes

$$A = \varphi_0 \text{ et } B = \dot{\varphi}_0 + \varphi_0 \cdot \delta.$$

Il ne s'agit alors plus d'un processus périodique et la fréquence angulaire ω n'apparaît plus dans la solution (3) (d'où l'appellation « apériodique »). C'est le régime apériodique pour lequel le pendule met le moins de temps pour retourner à sa position d'équilibre pour un amortissement minimum (d'où l'appellation « limite ou critique »).

Régime apériodique $\delta > \omega_0$

Le retour à l'équilibre du pendule se fait lentement et de manière asymptotique. Dans ce cas précis, la solution générale de l'équation (1) est de la forme

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{-\lambda t}) \quad (4).$$

avec $\lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

Montage expérimental

- Réaliser le montage conformément à la fig. 1.
- Visser la tige support dans le capteur de rotation.
- Enfiler avec précaution l'arbre du capteur de rotation S dans la douille prévue à cet effet du corps oscillant (cf. fig. 2, à gauche). Pour ce faire, ne pas tenir le corps oscillant afin d'éviter ainsi un éventuel balourd. Pour la connexion exempte de glissement des deux arbres, le joint torique doit être complètement enfiché sur l'axe du capteur de rotation S (fig. 2, à droite).

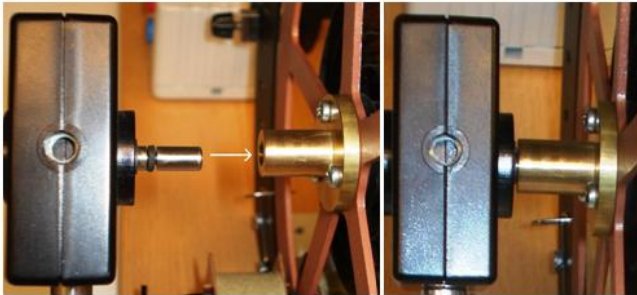


Fig. 2 Mise en place du capteur de rotation S sur le pendule de Pohl

- Poser avec précaution la tige du capteur de rotation S sur la table (cf. fig. 3) de façon à ce que les deux arbres soient bien alignés sans aucune contrainte mécanique.

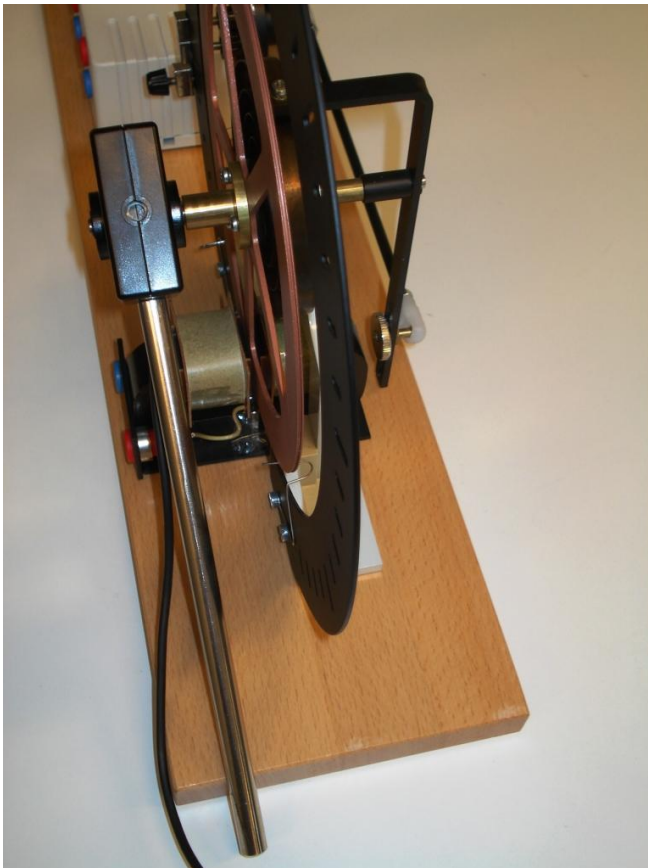


Fig. 3 Capteur de rotation S raccordé au pendule de Pohl

- Brancher le capteur de rotation S au Sensor-CASSY 2.
- Brancher l'alimentation et l'instrument de mesure à l'électro-aimant pour le frein à courants de Foucault ainsi qu'illustré sur la fig. 4.
- Attendre avant de mettre l'alimentation en marche !
- Régler le pendule de manière à ce que les pointeurs pour la position de phase de l'excitateur et du corps oscillant soient face à face. Pour ce faire, éventuellement légèrement tourner la roue motrice du moteur de l'excitateur.

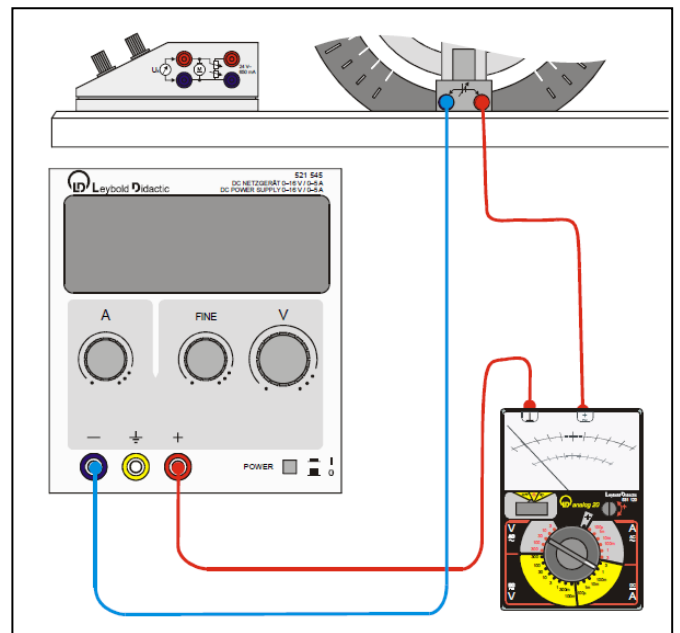


Fig. 4 Branchement du frein à courants de Foucault


Réalisation

Remarque de sécurité


Tenir compte du courant maximum admissible par l'électro-aimant du frein à courants de Foucault :

$$I_{\max} = 1 \text{ A (temporairement 2 A)}$$

a) Régime pseudo-périodique / Détermination du coefficient d'amortissement

- [Charger les paramètres dans CASSY Lab 2](#). Ne pas lancer la mesure tout de suite !
- Mettre l'alimentation en marche.
- Observer l'intensité du courant sur l'instrument de mesure. Régler et noter un courant d'env. 0,3 A.
- Lorsque le corps oscillant est en position d'équilibre, calibrer l'angle de déviation α_{A1} avec $\rightarrow 0 \leftarrow$ dans CASSY Lab 2.
- Lancer la mesure dans CASSY Lab 2 avec .
- Écarter le corps oscillant jusqu'à la butée. Veiller à ce que le pointeur pour la déviation ne touche pas le ressort. Tenir le corps oscillant !

N.B. : pour démarrer, le corps oscillant doit toujours être écarté du côté de l'angle de déviation positif !

- Laisser le corps oscillant osciller jusqu'à ce qu'il soit en position d'équilibre.
- Lorsque le corps oscillant est retourné à sa position d'équilibre, stopper la mesure dans CASSY Lab 2 avec .
- Recommencer la mesure pour de plus grandes intensités du courant (jusqu'à env. 1,4 A).

b) Étude du passage du régime pseudo-périodique au régime apériodique en passant par le régime critique**Régime critique ou cas limite apériodique**

- Régler un courant d'env. 1,5 A.
- Écarter le corps oscillant de sa position d'équilibre jusqu'à la butée et lâcher. Le corps oscillant doit s'approcher le plus vite possible de sa position d'équilibre sans aller au-delà.
- Le cas échéant – c.-à-d. en régime pseudo-périodique – légèrement augmenter l'intensité du courant.
- Une fois l'intensité du courant réglée, la noter.
- Recommencer la mesure ainsi que décrit ci-dessus.

N.B. : une fois la courbe relevée, éteindre l'alimentation afin de faire refroidir l'électro-aimant pour le frein à courants de Foucault.

Régime apériodique

- Mettre l'alimentation en marche et régler un courant d'env. 2 A.
- Recommencer la mesure ainsi que décrit ci-dessus.
- Une fois la courbe relevée, éteindre immédiatement l'alimentation pour éviter une surchauffe de l'électro-aimant pour le frein à courants de Foucault.

Exemple de mesure

Régime pseudo-périodique

Des exemples de mesure pour le régime pseudo-périodique sont représentés sur les figures 5 à 7. Les axes des abscisses (axe du temps) sont gradués différemment.

Les valeurs mesurées sont ajustées avec une modélisation conformément à l'équation (2) :

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t).$$

Les intensités de courant correspondantes ainsi que les paramètres d'ajustement sont récapitulés dans le tableau suivant.

Tab. 1 : paramètres pour les différents cas de régime pseudo-périodique.

I	δ	ω	A	B
A	$\frac{1}{s}$	$\frac{\circ}{s}$	\circ	\circ
0,30	0,13	196,4	138,6	-57,3
0,64	0,50	193,7	138,7	-37,4
1,34	2,10	158,0	130,0	26,7

Régime critique ou cas limite apériodique

La figure 8 représente l'exemple de mesure pour le régime critique.

Les valeurs de mesure sont ajustées avec une modélisation conformément à l'équation (3) :

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \cdot (A + B \cdot t).$$

Dans ce cas, il y a un paramètre de moins étant donné qu'il n'y a pas la différence $(\delta^2 - \omega_0^2)$.

Tab.2 : paramètres pour le régime critique.

I	δ	A	B
A	$\frac{1}{s}$	\circ	$\frac{\circ}{s}$
1,6	4,2	131,5	433,2

Régime apériodique

La fig. 9 représente un exemple de mesure pour le régime apériodique. Avec un amortissement aussi important, le corps oscillant écarté revient seulement lentement à sa position d'équilibre sans aller au-delà.

Les valeurs mesurées sont ajustées avec une modélisation conformément à l'équation (4) :

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{-\lambda t}).$$

Ici, δ n'est plus le coefficient d'amortissement. Dans l'équation, il y a deux fonctions exponentielles avec les exposants $(-\lambda + \delta) t$ et $(\lambda - \delta) t$. Le retour lent à l'équilibre est déterminé par le plus petit exposant.

Tab.3 : paramètres pour un régime apériodique.

I	δ	λ	A	B
A	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	\circ	\circ
1,9	1,41	0,16	-145,9	283,2

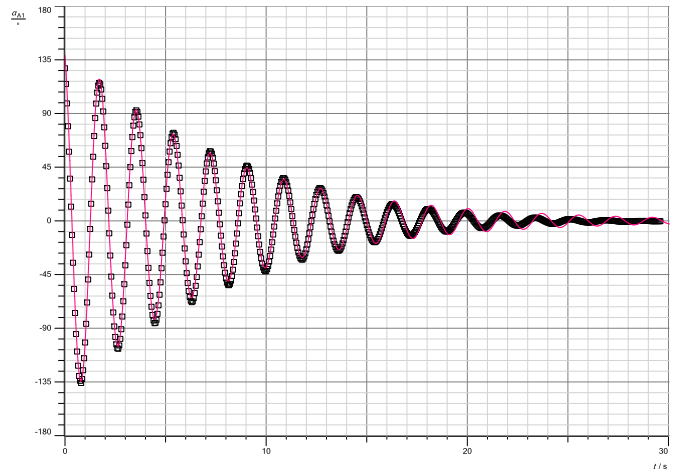


Fig. 5 Régime pseudo-périodique avec $I = 0,3 \text{ A}$

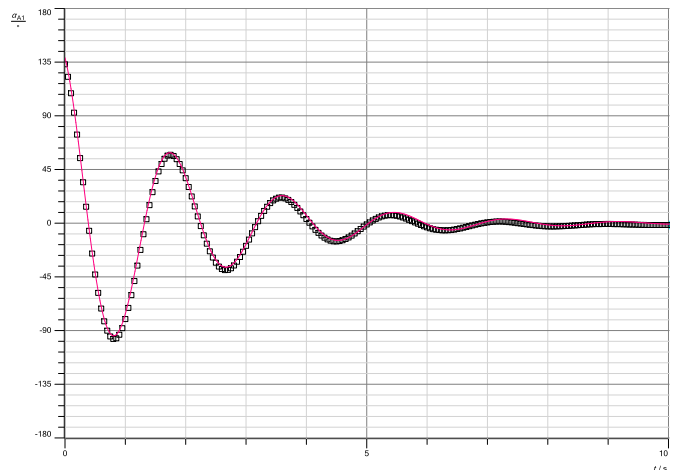


Fig. 6 Régime pseudo-périodique avec $I = 0,64 \text{ A}$

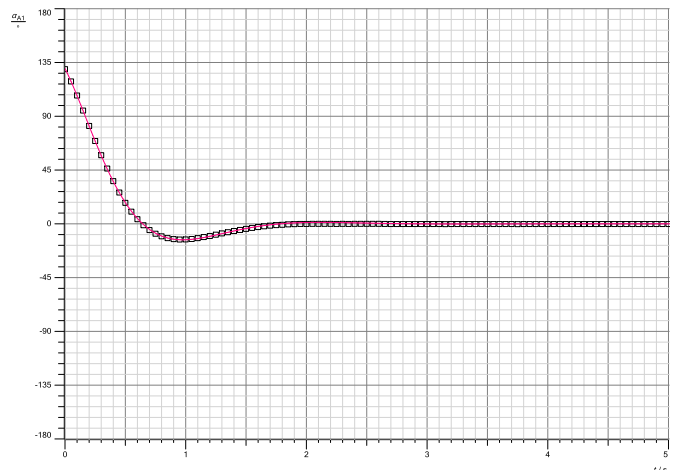
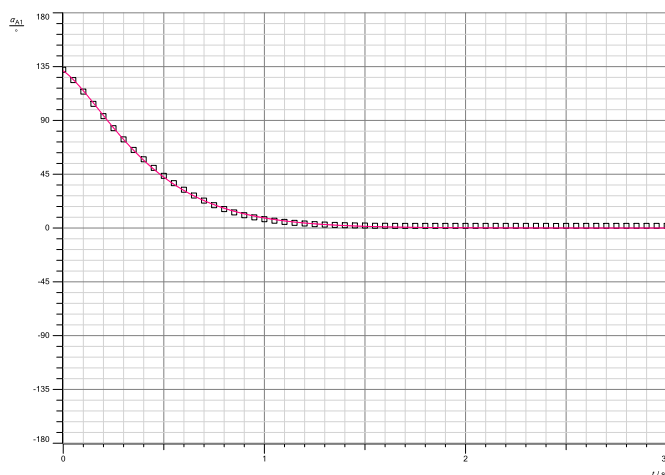
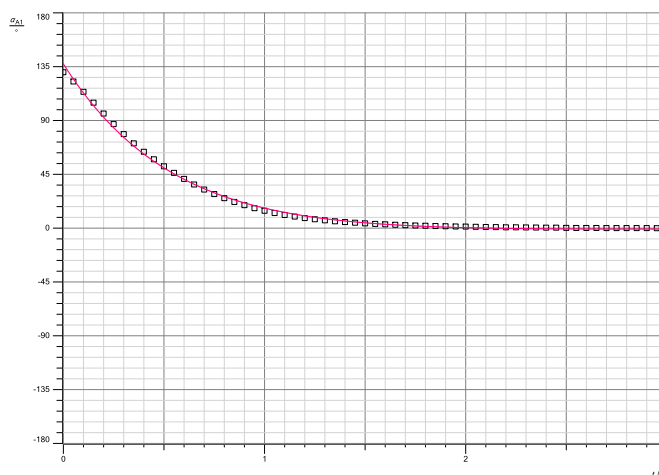


Fig. 7 Régime pseudo-périodique avec $I = 1,35 \text{ A}$

Fig. 8 Régime critique ou cas limite apériodique avec $I = 1,6$ AFig. 9 Régime apériodique avec $I = 1,9$ A

Remarques

Dans les tableaux 1 et 2, on voit que le coefficient d'amortissement δ est une fonction à croissance rapide du courant appliqué à l'électro-aimant du frein à courants de Foucault. La baisse exponentielle de l'amplitude est le résultat de l'amortissement quant à lui proportionnel à la vitesse angulaire. En cas de rotation très lente, cet amortissement est d'une valeur égale au frottement mécanique (très faible) et l'équation (1) reçoit un terme supplémentaire. Cet effet est nettement visible au niveau du faible déphasage entre la courbe d'ajustement et les valeurs mesurées sur les figures 5 et 6 pour de faibles amplitudes (grandes valeurs de t).

La graduation de l'axe du temps sur les figures 8 et 9 est la même ce qui permet une comparaison immédiate. La différence entre le régime critique et le régime apériodique réside dans le fait que le pendule met moins longtemps à revenir à sa position d'équilibre, et qu'il faut donc moins longtemps pour que l'angle de déviation soit à nouveau 0.