Mechanik

Akustik

Fourier-Analyse

Untersuchung der Fast Fourier Transformation: Simulation von Fourier-Analyse und Fourier-Synthese

Beschreibung aus CASSY Lab 2

Zum Laden von Beispielen und Einstellungen bitte die CASSY Lab 2-Hilfe verwenden.

CASSY Lab 2 (2013-06-07)

Fourier-Analyse von simulierten Signalen

Versuchsbeschreibung

Die Frequenzanalyse ist eine gebräuchliche Arbeitsmethode für eine Vielzahl von Anwendungen, bei denen zeitlich veränderliche Signale (oder Messwerte) auftreten. So ist beispielsweise in der Akustik die genaue Kenntnis der Obertöne eines Klangs für die künstliche Erzeugung von Klängen oder Sprache wichtig.

In diesem Versuch soll als Einstieg in das Thema der Fourier-Transformation zunächst die Fourier-Transformierte von einfachen periodischen Signalen untersucht werden. Dazu wird in einem ersten Schritt die Fourier-Transformierte eines nummerisch simulierten Signals berechnet und die Frequenzen und die zugehörigen Amplituden bestimmt (Fourier-Analyse). Auf der Basis dieser harmonischen Analyse wird dann in einem zweiten Schritt das zeitlich veränderliche Signal entsprechend dem Fourier-Theorem wieder zusammengesetzt und mit der theoretisch berechneten Fourier-Reihe sowie dem nummerisch simulierten Ausgangssignal verglichen (Fourier-Synthese).

Versuchsaufbau

Hinweis: Dieser Versuch ist ein reines Simulationsexperiment zur Fourier-Analyse mit CASSY Lab. Für ein Experiment mit elektrischen Signalen entsprechender Signalform sei auf den nächsten Versuch verwiesen. Die in diesem Versuch untersuchten Signale S_1 werden durch folgende Funktionen erzeugt:

Dreieck: S_1 = 4*(1-2*saw(f*t))
Rechteck: S_1 = 4*(2*square(f*t)-1)

mit der Frequenz f = 0,5 Hz.

Anmerkungen zur Fourier-Transformation

Ein kontinuierliches zeitabhängiges Signal S_1 wird bei der computergestützten Messung zu bestimmten Zeiten abgetastet. Auf diese Weise erhält man ein digitalisiertes Signal, das mit üblichen Methoden der digitalen Signalverarbeitung (Signal-Rausch-Verbesserung durch Fourier-Transformation, Glätten des Signals durch Mittelung, etc.) weiter bearbeitet werden kann. Das Abtast-Theorem gibt Auskunft darüber, in welchem zeitlichen Abstand eine Messung des Signalwertes erfolgen muss, damit der zeitliche Signalverlauf wieder aus den digitalisierten Messwerten (Datenpunkte) ermittelt werden kann. Für eine Digitalisierung des Signals mit hinreichender Anzahl von Datenpunkte muss die Abtastfrequenz f_s mindestens doppelt so groß sein wie die maximale im Signal vorkommende Frequenz f_{max}, welche die Breite des Frequenzspektrums bestimmt. Ist diese Bedingung $f_s \geq 2f_{max}$ nicht erfüllt, d. h. erfolgte die Digitalisierung des Signals bei einer zu niedrigen Abtastfrequenz f_s, so wird die Form des Signals nicht mehr erfasst (Aliasing). Die Abtastfrequenz f_s des Messsignals wird in den Messparametern (**Fenster → Messparameter anzeigen**) durch das eingestellte Intervall $\Delta t=1/f_s$ festgelegt.

Das Fourier-Theorem besagt, dass jedes zeitabhängige periodische Signal S_1 durch eine gewichtete Summe von cos- oder sin-Funktionen dargestellt werden kann. Für die im Versuch verwendete Dreieck- bzw. Rechteckfunktion lautet die Reihenentwicklung von S_1 nach trigonometrischen Funktionen bis zur neunten Ordnung:

Dreieck:

S_3 = 4*8/3.14^2 * (cos(360*f*t) + 1/9*cos(360*3*f*t) + 1/25*cos(360*5*f*t) + 1/49*cos(360*7*f*t)) + 1/81*cos(360*9*f*t)

Rechteck:

S_3 = 4*4/3.14 * (sin(360*f*t) + 1/3*sin(360*3*f*t) + 1/5*sin(360*5*f*t) + 1/7*sin(360*7*f*t) + 1/9*sin(360*9*f*t)

Der zeitabhängigen Funktion S_1 entspricht somit ein diskretes Frequenzspektrum mit unterschiedlichen Amplituden. Die Verallgemeinerung dieser Zerlegung auf nicht periodische Signale führt zum Fourier-Integral, das dem zeitabhängigen Signal S_1 ein kontinuierliches Frequenzspektrum F_1 zuordnet.

Die nummerische Berechnung des Frequenzspektrums F_1 wird besonders effizient, wenn man ein digitalisiertes Signal von $N=2^p$ Datenpunkten zugrundelegt. Statt der ca. N^2 Rechenoperationen müssen dann nur noch ca. $N \cdot \log2(N)$ Operationen durchgeführt werden. Dieses wesentlich weniger zeitaufwändige Verfahren bezeichnet man als schnelle Fourier-Transformation (FFT).

Mit einem solchen Algorithmus berechnet CASSY Lab das Frequenzspektrum F_1. Zunächst werden allerdings die vorhandenen Messpunkte derart gewichtet, dass Nichtperiodizitäten am Rand keine große Rolle mehr spielen (am Rand mit 0, in der Mitte maximal, Kaiser-Bessel-Wichtung(4.0)). Damit auch immer genau 2^p Messpunkte vorliegen, werden eventuell fehlende Messpunkte noch durch Nullen aufgefüllt.

Als Ergebnis der FFT zeigt CASSY Lab insgesamt N/2+1 reelle Amplituden (Phasenunterschiede werden also nicht mit ausgewertet). Diese Amplituden werden "überhöht" dargestellt, also $A_i := A_{i-1} + A_i + A_{i+1}$ damit die Amplituden scharfer Peaks in etwa der Theorie entsprechen. Ohne diese Überhöhung müsste für eine Amplitudenermittlung, wie sie in diesem Versuch durchgeführt wird, die Summe über alle Amplituden eines Peaks berechnet werden.

Die Verwendung der FFT zur Frequenzanalyse ist durch zwei grundlegende Beziehungen begrenzt. Die erste Beziehung verknüpft die höchste noch analysierbare Frequenz f_{max} mit der Abtastfrequenz f_s:

$f_{max} = f_s/2$.

Jede Frequenz, die größer als f_{max} ist, erscheint im Frequenzspektrum zwischen Null und f_{max} und ist damit nicht mehr unterscheidbar von den Frequenzanteilen, die tatsächlich zwischen 0 und f_{max} liegen. Die damit verbundene Veränderung der Signalform bezeichnet man mit Aliasing.

Die zweite Beziehung verbindet die Auflösung des Frequenzspektrums Δf (= Abstand benachbarter Punkte des Frequenzspektrums) mit der Abtastfrequenz f_s:

$\Delta f = f_{max}/(N/2) = f_s/N = 1/\Delta t/N = 1/T$

mit $T = N\cdot\Delta t$.

Das bedeutet, dass eine Erhöhung der Auflösung des Frequenzspektrums nur durch eine längere Messzeit zu erreichen ist.

Versuchsdurchführung

- Einstellungen laden
- Den Zeiger im Anzeigeinstrument Frequenz f mit der Maus auf die gewünschte Frequenz einstellen.
- simuliert die Aufnahme der Messwerte der Funktion S_1. Die Simulation dauert 50 s und nimmt dabei 500 Werte auf (Δt = 100 ms).

Längere Aufnahmezeiten erhöhen, kürzere Aufnahmezeiten erniedrigen schrittweise die Frequenzauflösung der FFT.

Auswertung

Bereits während der Simulation der Messwertaufzeichnung erscheint das $S_1(t)$-Diagramm des nummerisch simulierten Signals. Nach der Simulation steht die Fourier-Transformierte F_1 in der Darstellung **Frequenzspektrum** zur Verfügung.

Das Frequenzspektrum zeigt Peaks bei ungeraden Vielfachen der eingestellten Signalfrequenz f, also bei f, 3*f, 5*f, 7*f, usw.. Die Amplituden der Peaks können durch Anklicken der Kurve oder aus der Koordinatenanzeige abgelesen werden.

Zur Analyse nun die ersten 5 Amplituden als Faktoren vor den sin(360*n*f*t)-Funktionen in den Einstellungen A1, A3, A5, A7 und A9 eintragen. In der Darstellung **Fourier-Analyse** wird der zeitliche Verlauf der einzelnen Terme A_1, A_3, A_5, A_7 und A_9 wiedergegeben.

Im Diagramm **Fourier-Synthese** wird die experimentell bestimmte Reihe $S_2 = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9$ mit der theoretisch bestimmten Fourier-Reihe S_3 und der nummerisch simulierten Funktion S_1 verglichen. Es zeigt sich, dass in praktischen Anwendungen das periodische Signal S_1 hinreichend gut durch ein trigonometrisches Polynom S_2 bzw. S_3 von wenigen Termen angenähert werden kann.