

Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Stabpendel

Versuchsziel

- Messung der Schwingungsdauern T_1 und T_2 eines Stabpendels für zwei Aufhängungspunkte.
- Abstimmung des Stabpendels auf gleiche Schwingungsdauer.
- Bestimmung der Fallbeschleunigung aus der Schwingungsdauer und der reduzierten Pendellänge.

Grundlagen

Bei einem physikalischen Pendel gilt bei kleinen Auslenkungen für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_r}{g}} \quad (1)$$

Die reduzierte Pendellänge l_r erhält man aus dem Trägheitsmoment J , der Masse des Pendels m und dem Abstand des Aufhängepunktes zum Schwerpunkt s über

$$l_r = \frac{J}{ms} \quad (2)$$

Das Trägheitsmoment J des Physikalischen Pendels ist nach dem Satz von Steiner gegeben durch

$$J = J_s + ms^2 \quad (3)$$

J_s : Trägheitsmoment um die Schwerpunktschwerachse

Daher gilt für die reduzierte Pendellänge

$$l_r = \frac{J}{ms} = \frac{J_s}{ms} + s \quad (4)$$

Nach Gleichung (1) kann aus der reduzierten Pendellänge l_r und der Schwingungsdauer T die Erdbeschleunigung g berechnet werden:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2} \quad (5)$$

Der Wert für die Erdbeschleunigung g ist vom Ort abhängig, besonders vom Breitengrad und der Höhe über dem Meeresspiegel. Typische Werte sind

Ort	$g / \text{m/s}^2$
Deutschland	9,81
Äquator	9,78
Pole	9,83

Oft kann die reduzierte Pendellänge nicht mit der gewünschten Genauigkeit bestimmt werden, weil die genaue Bestimmung des Trägheitsmoments J oder des Schwerpunkts s schwierig ist. Dies kann durch die Verwendung eines Reversionspendels umgangen werden.

Das Reversionspendel ist eine besondere Bauform des physikalischen Pendels. Es kann wahlweise an zwei Drehpunkten zur Schwingung aufgehängt werden. Zwei auf dem Stabpendel verschiebbare Massen dienen zur Abstimmung der

Schwingungsdauer. Die reduzierten Pendellängen l_{r1} und l_{r2} sind nach Gleichung (3) gegeben durch

$$l_{r1} = \frac{J_s}{ms_1} + s_1 \quad (6)$$

$$l_{r2} = \frac{J_s}{ms_2} + s_2 \quad (7)$$

Ziel der Abstimmung ist, das Pendel um beide Aufhängepunkte mit der gleichen Schwingungsdauer schwingen zu lassen. Dann stimmt die reduzierte Pendellänge mit dem Abstand d der Aufhängepunkte überein, wie folgende Überlegung zeigt:

Wegen Gleichung (1) schwingt das Pendel um beide Aufhängepunkte mit der gleichen Schwingungsdauer, wenn die reduzierten Pendellängen übereinstimmen: $T_1 = T_2 \Leftrightarrow l_{r1} = l_{r2} = l_r$. Löst man Gleichung (6) nach J_s auf und setzt das Ergebnis in Gleichung (7) ein, erhält man $l_r = s_1 + s_2$. Die Summe $s_1 + s_2$ und damit l_r entspricht gerade dem Abstand d der beiden Aufhängepunkte.

Der Abstand der beiden Aufhängepunkte d und die Schwingungsdauer T können sehr genau bestimmt werden. Daher eignet sich das Reversionspendel gut zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g .

Im Versuch werden die Schwingungsdauern T_1 und T_2 eines Stabpendels für zwei Aufhängungspunkte bestimmt. Eine am Pendel befestigte Masse wird schrittweise verschoben. In der grafischen Darstellung der Messdaten erhält man zwei Schnittpunkte der Schwingungsdauerkurven. In beiden Schnittpunkten ist die Schwingungsdauer und damit die reduzierte Pendellänge gleich. Aus dieser Schwingungsdauer und dem Abstand der beiden Aufhängepunkte wird die Erdbeschleunigung g bestimmt.

Geräte

1 Sensor-CASSY	524 010USB
1 CASSY Lab	524 200
1 Drehbewegungssensor S	524 082
1 Physikalisches Pendel	346 20
1 Stativstange, 25 cm, d = 10 mm	301 26
2 Stativfuß MF	301 21
<i>zusätzlich erforderlich:</i>	
1 PC ab Windows 98/2000/XP/Vista	

Aufbau

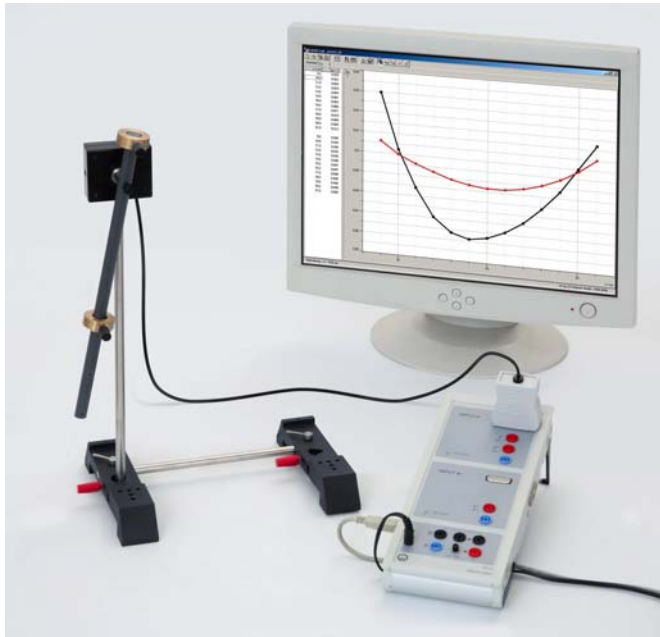


Abb. 1: Versuchsaufbau

- Stativmaterial wie in Abbildung 1 aufbauen. Darauf achten, dass beide Stativfüße plan auf der Unterlage stehen.
- Den Stab des Pendels beginnend bei 8,5 cm Abstand von einem Stabende mit Bleistift in 1-cm-Schritten bis etwa 21,5 cm markieren. Das Massestück kann so bei ganzzahligen Werten positioniert werden, indem es genau zwischen zwei aufeinander folgenden Strichen befestigt wird.
- Pendel am Aufhängepunkt in 5 cm Abstand zum Stabende auf der Achse des Drehbewegungssensors S befestigen.
- Ein Massestück zunächst wie in Abb. 1 skizziert am Pendelende nahe des Aufhängepunkts befestigen.
- Den Drehbewegungssensor S an den Eingang A des Sensor-CASSY anschließen.
- CASSY Lab aufrufen und das Beispiel „Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Reversionspendel“ laden.
- Einstellungen laden.

Durchführung

- Zweite, variable Pendelmasse auf die Position $x = 9$ cm setzen und etwa 10° auslenken.
- Wenn der Anzeigewert für die Schwingungsdauer T_{A1} näherungsweise konstant ist und Amplitude A_{A1} auf etwa 5° abgenommen hat, den Messwert mit \odot oder Taste F9 aufnehmen und die Position in Spalte x eintragen (Tabelle mit der Maus anklicken).
- Die Pendelmasse jeweils um 1 cm verschieben und die Messung bis $x = 21$ cm wiederholen
- Die Masse auf $x = 10$ cm versetzen. Aufhängepunkt des Pendels wechseln, indem das Pendel umgedreht wird.
- Im Messparameterfenster „neue Messreihe anhängen“ wählen.
- Messung für den zweiten Aufhängepunkt wiederholen.

Messbeispiel und Auswertung

In der grafischen Darstellung (Abbildung 2) sind zwei Schnittpunkte der Schwingungsdauerkurven zu sehen. In beiden Schnittpunkten ist die Schwingungsdauer und damit die reduzierte Pendellänge gleich. Sie entspricht dem Abstand der beiden Drehachsen $d = 0,20$ m.

Durch eine waagerechte Markierung wurde die dazugehörige Periodendauer auf $T = 0,899$ s bestimmt. Dies führt laut Gleichung (5) zu einer Erdbeschleunigung von $g = 9,77$ m/s².

Im CASSY-Lab-Beispiel kann neben der Darstellung der Schwingungsdauern zusätzlich eine Darstellung g gewählt werden. Hierfür werden die Messwerte T_{A1} punktweise in Werte g umgerechnet über

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot d}{T_{A1}^2} \quad \text{mit } d = 0,20 \text{ m}$$

In dieser Auftragung kann die Erdbeschleunigung in etwas höherer Auflösung direkt ebenfalls aus den Schnittpunkten der beiden Kurven abgelesen werden. Man erhält $g = 9,78$ m/s².

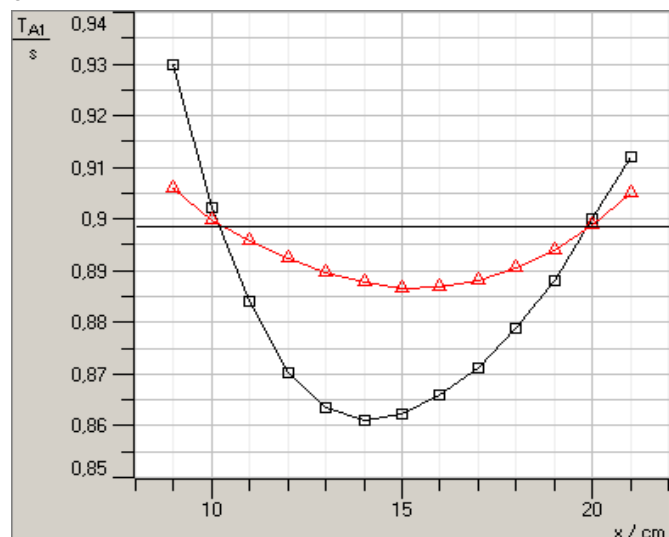


Abb. 2: Messergebnisse

Anmerkungen zum Messfehler

Der Fertigungsfehler des Stabes schlägt sich als Fehler der reduzierten Pendellänge l nieder:

$$\Delta l = \pm 0,1 \text{ mm} = \pm 0,0005 l_r$$

Der Fehler in der Schwingungsdauer T hat hauptsächlich zwei Ursachen:

- Der Messfehler des Drehbewegungssensors:
 $\Delta T = \pm 0,001 \cdot T$
- Der systematischen Fehler aufgrund der Auslenkung des Pendels. Bei einer Amplitude $A = 5^\circ$ beträgt dieser Fehler
 $\Delta T = +0,0005 \cdot T$, also $\Delta g = -0,01$ m/s².

Berücksichtigt man beim Ergebnis der Auswertung den systematischen Fehler, so erhält man $g = 9,78$ m/s² (bzw. $g = 9,79$ m/s²).

Der statistische Fehler ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler der reduzierten Pendellänge und dem Messfehler des Drehbewegungssensors und beträgt $\pm 0,044$ m/s². Der Messwert stimmt damit im Rahmen der Messgenauigkeit mit dem Literaturwert $g = 9,81$ m/s² für Deutschland überein.