Mechanik

Schwingungslehre
Mathematisches und Physikalisches Pendel

Handblätter Physik

P1.5.1.4

Abhängigkeit der Schwingungsdauer eines Stabpendels von der Amplitude

Versuchsziel

- Messung der Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Amplitude einer Schwingung
- Anpassung der Messwerte mit geeigneten Näherungen

Grundlagen

Die Bewegungsgleichung für ein physikalisches Pendel mit dem Trägheitsmoment *J*, der Masse *m* und dem Abstand *s* zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt

$$J \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot g \cdot s \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

beschreibt für kleine Auslenkungen ($\sin \alpha \approx \alpha$) eine harmonische Schwingung. Die Schwingungsdauer beträgt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}\ . \qquad (2)$$

mit der reduzierten Pendellänge $l_r = J / m \cdot s$ und ist nicht von der Amplitude abhängig.

Für große Auslenkungen ist die Näherung nicht zulässig; die Schwingungsdauer nimmt mit zunehmender Amplitude zu. Der Zusammenhang von Amplitude und Schwingungsdauer kann durch folgende Reihenentwicklung beschrieben werden:

$$T = T_0\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^6+\dots\right)\right)\right)\right) \qquad (3)$$

Dabei ist T_0 durch die amplitudenunabhängige Schwingungsdauer bei kleinen Winkeln gegeben (siehe Gleichung 2). Die Zahl der berücksichtigten Reihenglieder bestimmt, mit welcher Genauigkeit die Schwingungsdauer bei gegebener Amplitude bestimmt werden kann. Je größer die Amplitude ist, desto mehr Reihenglieder müssen berücksichtigt werden, um die gleiche Genauigkeit zu erreichen.

Im Versuch wird die Schwingungsdauer *T* in Abhängigkeit von der Amplitude *A* der Schwingung aufgenommen. Dazu wird ein Stabpendel anfangs einmal angestoßen und fortlaufend Amplitude und Schwingungsdauer gemessen. Durch die geringfügige Reibung nimmt die Amplitude langsam ab. Das bedingt wiederum eine kleine Abnahme der Schwingungsdauer. Der theoretische Zusammenhang zwischen Amplitude und Schwingungsdauer wird durch eine freie Anpassung bestätigt. Durch die Berücksichtigung verschieden vieler Reihenglieder wird gezeigt, welchen Einfluss die Mitnahme weiterer Reihenglieder auf die Genauigkeit der Anpassung hat.

Aufbau

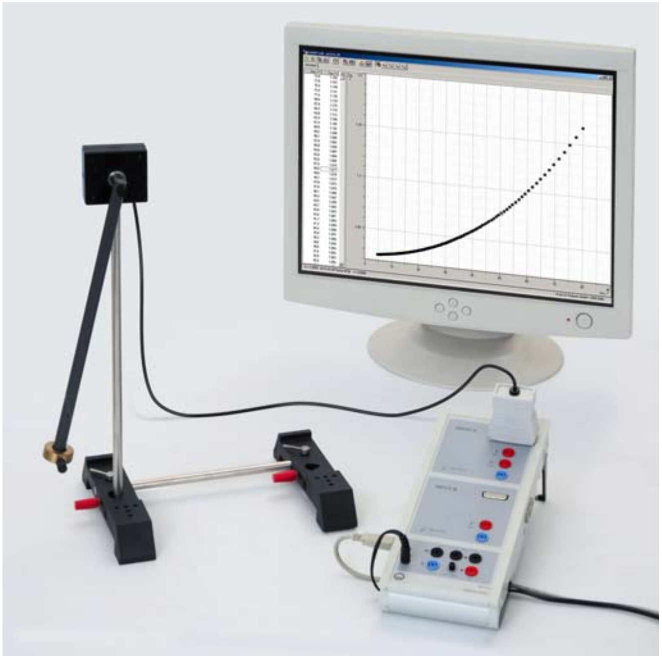

Abb. 1: Versuchsaufbau

Geräte

1 Sensor-CASSY	524 010USB
1 CASSY Lab	524 200
1 Drehbewegungssensor S	524 082
1 Physikalisches Pendel	346 20
1 Stativstange, 25 cm, d = 10 mm	301 26
2 Stativfuß MF	301 21

zusätzlich erforderlich:
1 PC ab Windows 98/2000/XP/Vista

CS-0707

LD Didactic GmbH · Leyboldstraße 1 · D-50354 Hürth · Telefon: (02233) 604-0 · Fax: (02233) 604-222 · E-Mail: info@ld-didactic.de

Versuchsaufbau

- Stativmaterial wie in Abbildung 1 aufbauen. Darauf achten, dass beide Stativfüße plan auf der Unterlage stehen.
- Das Pendel am Stabende auf der Achse des Drehbewegungssensors S befestigen. Ein Massestück am unteren Ende des Stabpendels anbringen.
- Den Drehbewegungssensor S an den Eingang A des Sensor-CASSY anschließen.
- CASSY Lab aufrufen und das Beispiel „Abhängigkeit der Schwingungsdauer eines Stabpendels von der Amplitude“ laden.
- Einstellungen laden.

Durchführung

- Pendel mehr als 30° auslenken und loslassen (ggf. Messbereiche anpassen).
- Wenn der Anzeigewert für die Schwingungsdauer T_{A1} konstant geworden ist, Messung mit oder Taste F9 starten
- Messung mit oder Taste F9 stoppen, sobald die Amplitude unter 5° liegt. Darunter wird die Bestimmung der Schwingungsdauer unsicher.

Messbeispiel und Auswertung

In Abbildung 2 ist die Schwingungsdauer des Stabpendels in Abhängigkeit von der Amplitude gezeigt. Während der Messung nimmt die Amplitude langsam ab. Dies bedingt eine geringfügige Abnahme der Schwingungsdauer von T = 1,15 s auf T = 1,025 s.

Der theoretische Zusammenhang zwischen Amplitude und Schwingungsdauer aus Gleichung (3) wird durch freie Anpassung bestätigt. In Abbildung 3 sind drei Anpassungen unter Mitnahme von 1-3 Termen aus Gleichung (3) gezeigt, mit T_0 = 1,025 s:

Blau: $$T_B = T_0\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)$$

Rot: $$T_R = T_0\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4\right)\right)$$

Schwarz: $$T_S = T_0\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4+\left(\frac{5}{6}\right)^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^6\right)\right)\right)$$

Der unterschiedliche Verlauf der drei angepassten Kurven ist besonders bei großen Winkeln gut sichtbar. Die blaue Kurve T_B, bei der ein winkelabhängiger Term berücksichtig wird, gibt die Messwerte nur bei kleinen Werten gut wieder. Die Abweichung der roten Kurve T_R von den Messdaten ist deutlich geringer. Die schwarze Kurve T_S liefert bei noch bei einer Amplitude A = 80° eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten.

Für einen quantitativen Vergleich zeigt folgende Tabelle zusätzlich ausgewählte Messwerte und die jeweiligen Ergebnisse der Anpassungen:

A / °	T / s	T_B / s	T_R / s	T_S / s
5	1,025	1,025	1,025	1,025
25	1,037	1,037	1,037	1,037
50	1,076	1,071	1,075	1,076
75	1,149	1,121	1,141	1,147

Bei einer Amplitude A = 75° beträgt der Fehler der Anpassung bei Berücksichtung eines winkelabhängigen Terms 2,4%, bei zwei Termen 0,7% und bei drei Termen nur 0,2%.

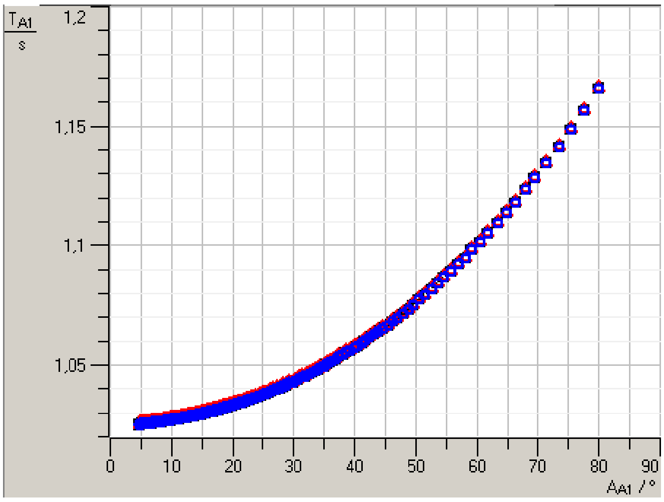

Abb. 2: Schwingungsdauer des Stabpendels in Abhängigkeit von der Amplitude

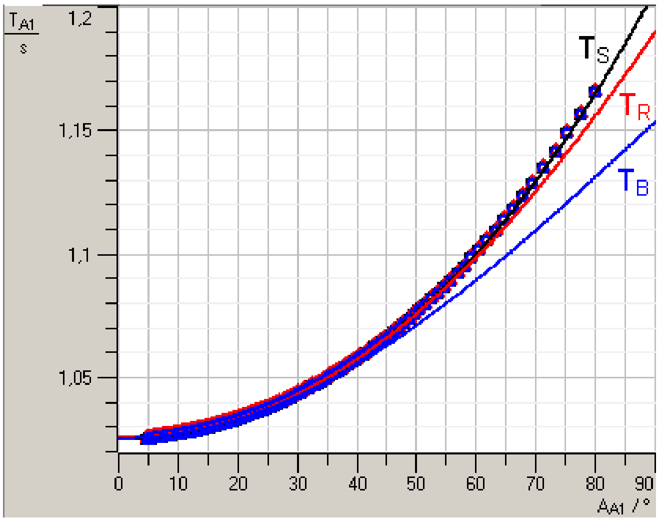

Abb. 3: Anpassung von Kurven mit unterschiedlicher Genauigkeit