Schwingungen eines Stabpendels

Versuchsziel

- Zeitabhängige Aufnahme der Schwingung eines Stabpendels
- Bestimmung der reduzierten Pendellänge l_r aus der Schwingungsdauer T
- Vergleich von Auslenkung α(t), Geschwindigkeit ω(t) und Beschleunigung *a(t)*

Grundlagen

Die Bewegungsgleichung für ein physikalisches Pendel mit dem Trägheitsmoment *J*, der Masse *m* und dem Abstand *s* zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt

$$J \cdot \alpha'' + m \cdot g \cdot s \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

beschreibt für kleine Auslenkungen ($\sin\alpha \approx \alpha$) eine harmonische Schwingung

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (2)$$

mit der Amplitude α_0, der Eigenfrequenz der Schwingung ω_0 und der Phasenverschiebung φ. Für die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und die Winkelbeschleunigung $a(t)$ der Schwingung ergibt sich daraus:

$$\omega(t) = \dot{\alpha}(t) = \alpha_0 \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (3)$$

$$a(t) = \ddot{\alpha}(t) = -\alpha_0 \cdot \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 \cdot \alpha(t) \qquad (4)$$

Die Schwingungsdauer beträgt

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}}\,. \qquad (5)$$

Zur besseren Anschauung wird die reduzierten Pendellänge

$$l_r = J / m \cdot s \qquad (6)$$

eingeführt. Sie gibt die Länge eines mathematischen Pendels an, dessen Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \qquad (7)$$

gerade der Schwingungsdauer des physikalischen Pendels entspricht.

Im Versuch wird die Schwingung eines Stabpendels untersucht, das ein einfaches physikalisches Pendel darstellt. Das Trägheitsmoment eines Stabes der Länge *l* bei einer Drehung um den Schwerpunkt ist $J_S = 1/12 \cdot ml^2$. Mit dem Steiner'schen Satz

$$J = J_S + ms^2 \qquad (8)$$

erhält man daraus das Trägheitsmoment um beliebige Achsen mit dem Abstand *s* zum Schwerpunkt. Drehachsen sind an diesem Pendel nahe dem Stabende ($s_1 \approx ½\, l$) und im Abstand $s_2 = 1/3 \cdot l$ vorgesehen. Die Trägheitsmomente betragen daher $J_1 = 1/3\ ml^2$ bzw. $J_2 = 7/36\ ml^2$; die reduzierten Pendellängen $l_{r1} = 2/3\ l$ bzw. $l_{r2} = 7/12\ l$.

Mit dem Drehbewegungssensor S wird die Schwingung des Pendels zeitabhängig aufgenommen. Aus dem Winkel $\alpha(t)$ werden die Geschwindigkeit $\omega(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ berechnet und miteinander verglichen. Zudem wird aus der gemessenen Schwingungsdauer *T* die reduzierte Pendellänge bestimmt und mit dem berechneten Wert verglichen.

Aufbau

Abb. 1: Versuchsaufbau

Geräte

1 Sensor-CASSY	524 010USB
1 CASSY Lab	524 200
1 Drehbewegungssensor S	524 082
1 Physikalisches Pendel	346 20
1 Stativstange, 25 cm, d = 10 mm	301 26
2 Stativfuß MF	301 21

zusätzlich erforderlich:
1 PC ab Windows 98/2000/XP/Vista

CS-1207

Versuchsaufbau

- Stativmaterial wie in Abbildung 1 aufbauen. Darauf achten, dass beide Stativfüße plan auf der Unterlage stehen.
- Das Pendel am Stabende auf der Achse des Drehbewegungssensors S befestigen.
- Den Drehbewegungssensor S an den Eingang A des Sensor-CASSY anschließen.
- CASSY Lab aufrufen und das Beispiel „Schwingungen eines Stabpendels (mit Massestück)“ laden.
- Einstellungen laden. Neben der Winkeldarstellung sind bereits eine Übersichtsdarstellung mit $\alpha(t)$, $\omega(t)$ und $a(t)$ und ein Phasendiagramm $\omega(\alpha)$ vorbereitet.

Durchführung

- Den Nullpunkt in der Gleichgewichtslage des Pendels definieren (→ 0 ← in Einstellungen *α*A1).
- Das Pendel etwa 10° auslenken und loslassen.
- Die Messung mit oder Taste F9 starten. Die Messung stoppt nach 10 s automatisch.
- Die Messung am zweiten Aufhängepunkt wiederholen.
- Die Messung mit Massestück wiederholen. Hierzu ein Massestück am unteren Ende des Pendels befestigen.

Hinweise:

Die Amplitude der Schwingung nimmt wegen geringfügiger Reibung langsam ab. Da unterhalb einer Amplitude von 5° die Bestimmung der Schwingungsdauer unsicher wird, ist zu Messbeginn eine Auslenkung von etwa 10° sinnvoll. Die Kleinwinkelnäherung sin $\alpha \approx \alpha$ gilt i.A. zwar nur für Winkel kleiner 5°. Die Abweichung der Schwingungsdauer vom Wert der harmonischen Schwingung (Gleichung 7) beträgt für Amplituden kleiner 10° jedoch nur 0,2% und kann daher im Folgenden vernachlässigt werden.

Die gezeichneten Kurvenformen hängen stark vom gewählten Zeitintervall ab. Wählt man das Zeitintervall zu kurz, erhält man aufgrund der dichten Messwertfolge eine Kurve mit gut ausgeprägten Maxima und Minima. Aufgrund der geringen Änderung von Messwert zu Messwert bewirkt der Messfehler jedoch deutliche Sprünge in der 1. und besonders in der 2. Ableitung. Wählt man das Zeitintervall zu groß, wird der Kurvenverlauf schlecht abgebildet. Das Zeitintervall kann daher nur ein Kompromiss sein zwischen dichter Messwertfolge, gut ausgeprägten $\alpha(t)$-Minima und Maxima (kleineres Zeitintervall) sowie kleinen Fehlern im $\omega(t)$- und $a(t)$-Diagramm (größeres Zeitintervall). Gute Ergebnisse erhält man im Bereich von 20 Messwerten pro Schwingungsdauer.

Messbeispiel und Auswertung

In Abbildung 2 ist die Auslenkung des Stabpendels (Aufhängung am Stabende, ohne Massestück) über die Zeit aufgetragen. Der sinusförmige Verlauf ist deutlich zu erkennen. Die Amplitude nimmt langsam ab; dies ist auf geringfügige Reibung zurückzuführen. Nach einigen Schwingungen lässt sich durch eine senkrechte Linie die Dauer für diese Schwingungen und daraus die gemittelte Schwingungsdauer bestimmen. Im Messbeispiel betrug die Zeit für 10 Schwingungen t = 8,88 s, daraus ergibt sich T = 0,888 s.

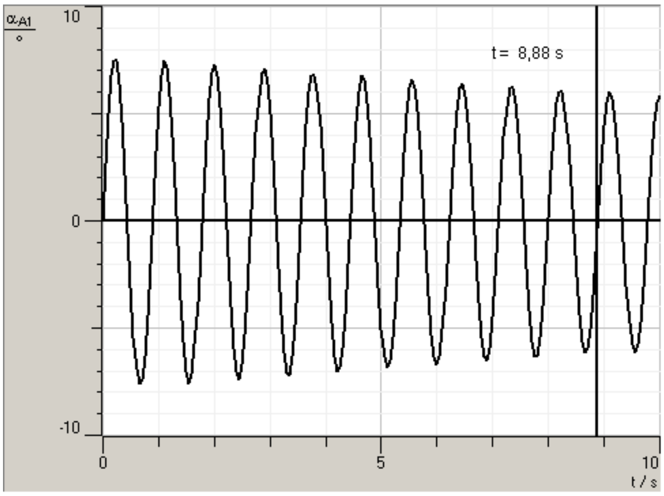

Abb. 2: Schwingung eines Stabpendel

Bestimmung der reduzierten Pendellänge

Durch Umstellen von Gleichung (6) kann aus der Schwingungsdauer die reduzierte Pendellänge l_r berechnet werden:

$$l_r = g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 19{,}6 \text{ cm}$$

mit g = 9,81 m/s². Die Länge des Stabpendels beträgt 30 cm. Dieser Wert entspricht daher gut dem theoretischen Wert von $l_{r1} = 2/3\, l$ = 20 cm.

Berücksichtigt man zusätzlich, dass sich der Aufhängepunkt nicht exakt am Stabende befindet, sondern in 0,5 cm Abstand, ergibt sich bei exakter Anwendung von Gleichung (7) mit $s_1' = 14{,}5$ cm: $l_{r1}' = 19{,}7$ cm.

Die Messung wurde am zweiten Aufhängepunkt und mit Massestück wiederholt. Für Schwingungsdauer und reduzierte Pendellänge ergaben sich folgende Werte:

Messung am zweiten Aufhängepunkt:
T = 0,838 s; l_r = 17,5 cm; theoretisch: l_{r2} = = $7/12 l$ = 17,5 cm

Messung mit Massestück am Stabende:

T = 0,955 s; l_r = 22,7 cm

Vergleich von Auslenkung α(t), Geschwindigkeit ω(t) und Beschleunigung *a*(*t*)

Abbildung 3 zeigt zusätzlich zur Auslenkung $\alpha(t)$ auch die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und die Winkelbeschleunigung *a*(*t*). Alle drei Kurven zeigen einen sinusförmigen Verlauf mit gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude und Phasenverschiebung. Dies folgt aus den Gleichungen (2)-(4).

Da im Nullpunkt der Auslenkung getriggert wurde, ist die Phasenverschiebung φ in Gleichung (2) gerade Null. Die Auslenkung $\alpha(t)$ kann daher durch eine Sinusfunktion beschrieben werden mit einer Amplitude α_0 = 7,4° und der Eigenfrequenz der Schwingung $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ = 7,1 Hz.

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ folgt entsprechend Gleichung (3) einer Kosinusfunktion mit gleicher Eigenfrequenz. Für die Amplitude erhält man aus Abbildung 3 den Wert 54°/s. Dies entspricht gerade dem theoretischen Wert aus (3): $\alpha_0 \cdot \omega_0$ = 53°/s.

Die Winkelbeschleunigung *a*(*t*) ist gerade minimal, wenn die Auslenkung maximal ist, was durch die negative Amplitude in Gleichung (4) beschrieben wird. Als Betrag der Amplitude kann in der Messkurve der Wert 380°/s² abgelesen werden. Auch dies passt gut zum theoretisch erwarteten Wert $\alpha_0 \cdot \omega_0^2 = 383° / s^2$.

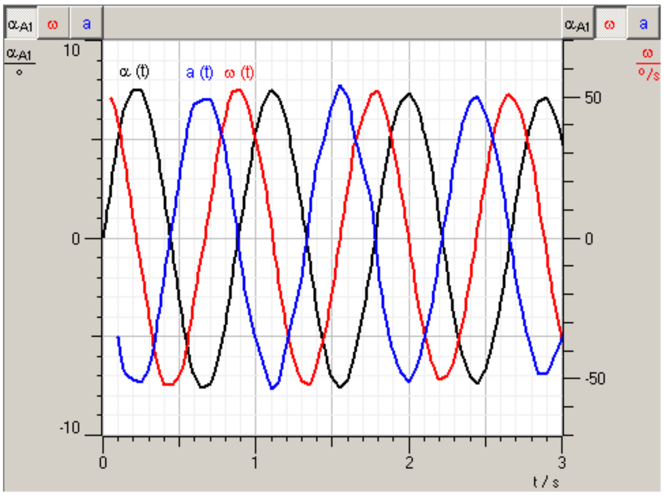

Abb. 3: Auslenkung $\alpha(t)$, Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und die Winkelbeschleunigung *a*(*t*) des Stabpendels im Vergleich