

Bestimmung der Gravitationskonstanten mit der Gravitations-Drehwaage nach Cavendish

Messung der Auslenkungen mit einem Lichtzeiger

Versuchsziele

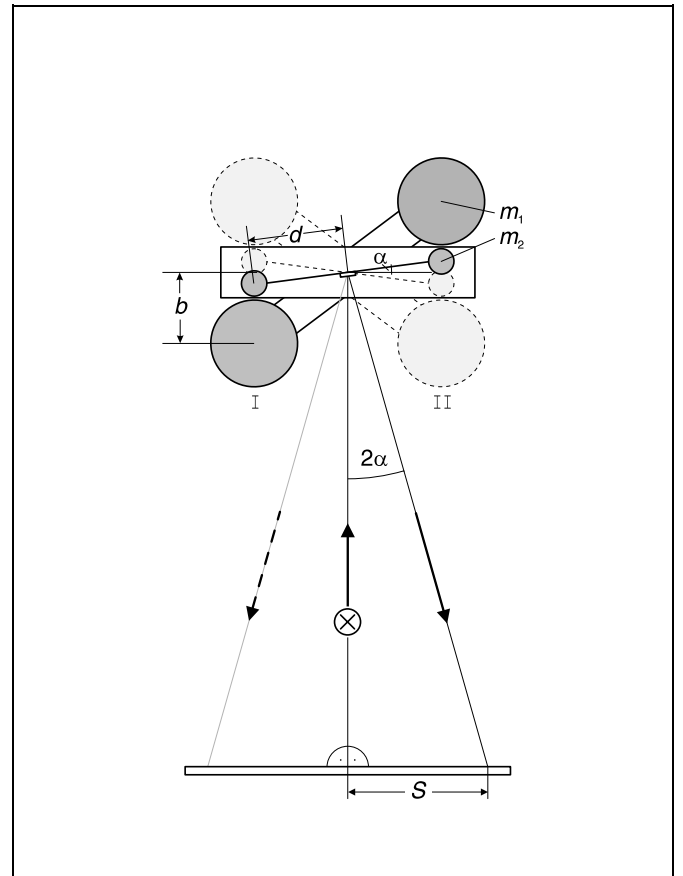
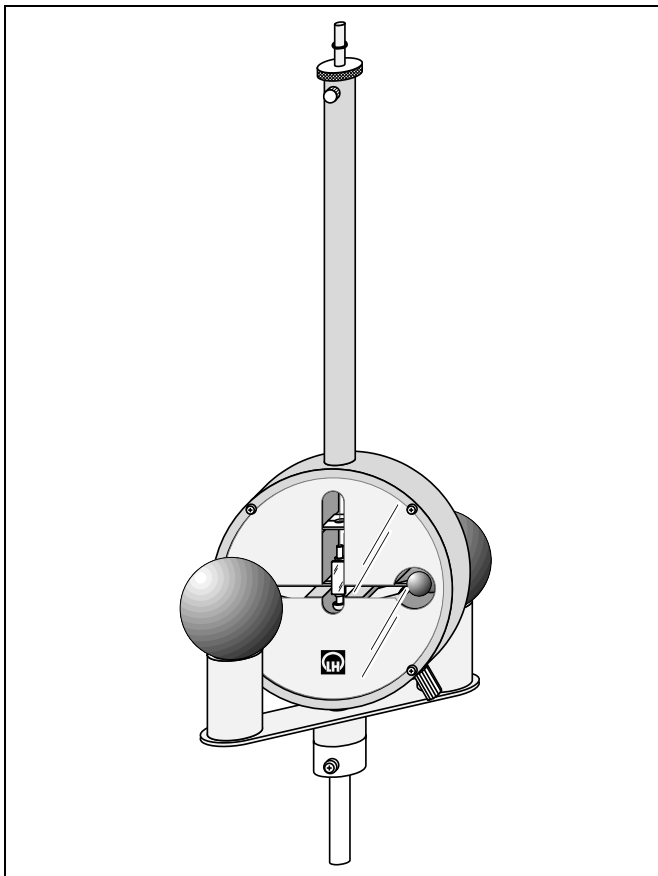
- Bestimmung der Anfangsgleichgewichtslage des Torsionspendels
- Aufnahme des zeitlichen Verlaufs der gedämpften Schwingungen um die Endgleichgewichtslage des Torsionspendels
- Bestimmung der Endgleichgewichtslage des Torsionspendels nach der Endausschlagmethode
- Berechnung der Gravitationskonstanten G aus der Schwingungsdauer und der Differenz der Gleichgewichtslagen
- Bestimmung der Gravitationskonstanten G nach der Beschleunigungsmethode

Grundlagen

Kernstück der Gravitations-Drehwaage nach Cavendish ist ein an einem dünnen Torsionsfaden waagrecht aufgehängter leichter Querbalken, der an jedem Ende im Abstand d zum Aufhängepunkt eine kleine Bleikugel der Masse m_2 trägt. Diese Kugeln werden von zwei großen Bleikugeln der Masse m_1 angezogen. Obwohl die Anziehungskraft weniger als 10^{-9} N beträgt, kann sie mit der extrem empfindlichen Torsionswaage nachgewiesen werden. Die Bewegung der kleinen Bleikugeln beobachtet und mißt man über einen Lichtzeiger (siehe Fig. 1).

Er wird mit Hilfe eines beleuchteten Hohlspiegels erzeugt, der starr am Querbalken des Torsionspendels befestigt ist. Aus dem zeitlichen Verlauf der Bewegung, der Masse m_1 und der Geometrie der Anordnung ermittelt man die Gravitationskonstante entweder nach der Endausschlagmethode oder – bei verkürztem Meßverfahren – nach der Beschleunigungsmethode.

Fig. 1: Gravitations-Drehwaage nach Cavendish und schematische Darstellung des Lichtzeigers



Geräte

1 Gravitations-Drehwaage	332 101
1 He-Ne-Laser, linear polarisiert	471 840
1 Tischstoppuhr	313 05
1 Rollbandmaß, 2 m	311 77
1 Kleiner Stativfuß, V-förmig	300 02
1 Drehmuffe	301 03
1 Leybold-Muffe	301 01
1 Stativstange, 47 cm	300 42

Endausschlagmethode:

Bei der Endausschlagmethode geht man von folgender Überlegung aus: Die Gravitationskraft zwischen je zwei Bleikugeln mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand b beträgt

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{b^2} \quad (I).$$

Auf das Torsionspendel wirkt daher das Drehmoment

$$M_I = 2 F \cdot d = 2 G \cdot \frac{m_1 m_2}{b^2} d \quad (II),$$

wenn sich die großen Bleikugeln in der Position I befinden (siehe Fig. 1). Das Drehmoment wird kompensiert durch das Rückstellmoment des Torsionsfadens; das Pendel nimmt die Gleichgewichtslage α_I ein.

Durch Umschwenken der großen Kugeln in Position II kehrt man die Kräfte symmetrisch um. Jetzt ist ein Drehmoment $M_{II} = -M_I$ wirksam. Das Pendel führt gedämpfte Schwingungen um die neue Gleichgewichtslage α_{II} aus. Für die Differenz der beiden Drehmomente gilt

$$D \cdot (\alpha_I - \alpha_{II}) = M_I - M_{II} = 2 M_I \quad (III).$$

Die Winkelrichtgröße D kann aus der Schwingungsdauer T und dem Trägheitsmoment J des Torsionspendels bestimmt werden:

$$D = J \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (IV)$$

Das Trägheitsmoment J setzt man mit dem Trägheitsmoment der beiden kleinen Kugeln

$$J = 2 m_2 \cdot d^2 \quad (V)$$

gleich. Damit geht (IV) über in

$$D = m_2 \cdot d^2 \cdot \frac{8\pi^2}{T^2} \quad (VI).$$

Aus (II), (III) und (VI) erhält man

$$G = \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{2\pi^2}{T^2} \cdot (\alpha_I - \alpha_{II}) \quad (VII).$$

Messung des Drehwinkels α :

In Fig. 1 ist die Messung des Drehwinkels α mit Hilfe des Lichtzeigers angedeutet: Der Beleuchtungsstrahl des Lichtzeigers steht hier senkrecht zur Nulllage des Torsionspendels (d.i. die Ruhelage ohne große Bleikugeln). Die Lichtzeigerposition für die Nulllage stimmt mit dem Skalennullpunkt überein. Zwischen dem Drehwinkel α , der Lichtzeigerposition S und dem Abstand L_0 zwischen Skala und Torsionspendel besteht der Zusammenhang

$$\tan 2\alpha = \frac{S}{L_0}$$

bzw.

$$\alpha = \frac{S}{2 L_0} \quad (VIII),$$

da der Winkel α sehr klein ist.

In Fig. 2 wird der Hohlspiegel unter dem waagerechten Winkel β beleuchtet. Die Lichtzeigerposition O für die Nulllage des Torsionspendels hat den Abstand L_1 zum Aufpunkt N der Normalen und den Abstand

$$L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2}$$

zum Hohlspiegel. Für eine Drehung des Torsionspendels um den Winkel α aus der Nulllage findet man die Zusammenhänge

$$S' = L \cdot \tan 2\alpha$$

und

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sin(90^\circ - \beta + 2\alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \cos \beta - \tan 2\alpha \cdot \sin \beta$$

Der Winkel α ist in jedem Fall sehr klein (er beträgt höchstens $1,5^\circ$), die Abmessungen der Gravitations-Drehwaage lassen Beleuchtungswinkel β oberhalb 30° nicht zu. Daher ist die Näherung

$$\frac{S'}{S} = \cos \beta = \frac{L_0}{L}$$

zulässig. Mit der zusätzlichen Näherung $2\alpha = \tan 2\alpha$ folgt insgesamt

$$\alpha = \frac{S}{2} \cdot \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \quad (IX).$$

Gleichung (IX) ist mit einem systematischen Fehler von 1–2 % behaftet, bei der Berechnung der Differenz der beiden Gleichgewichtslagen $\alpha_I - \alpha_{II}$ wird dieser systematische Fehler beinahe vollständig kompensiert.

Für den Spezialfall der Beleuchtung unter dem Winkel $\beta = 0^\circ$ ist $L_1 = 0$ zu setzen, und man erhält aus (IX) die bereits hergeleitete Gleichung (VIII).

Gleichung (IX) ist auch gültig, wenn der Beleuchtungsstrahl nach oben oder unten gekippt ist. Man richtet auch in diesem

Sicherheitshinweis

Der He-Ne-Laser genügt den „Sicherheitstechnischen Anforderungen für Lehr-, Lern- und Ausbildungsmittel – Laser; DIN 58126 Teil 6“ für Laser der Klasse 2. Bei Beachtung der entsprechenden Hinweise in der Gebrauchsanweisung ist das Experimentieren mit dem He-Ne-Laser ungefährlich.

- Nicht in den direkten oder reflektierten Laserstrahl blicken.
- Überschreiten der Blendungsgrenze vermeiden (d.h. kein Beobachter darf sich geblendet fühlen).

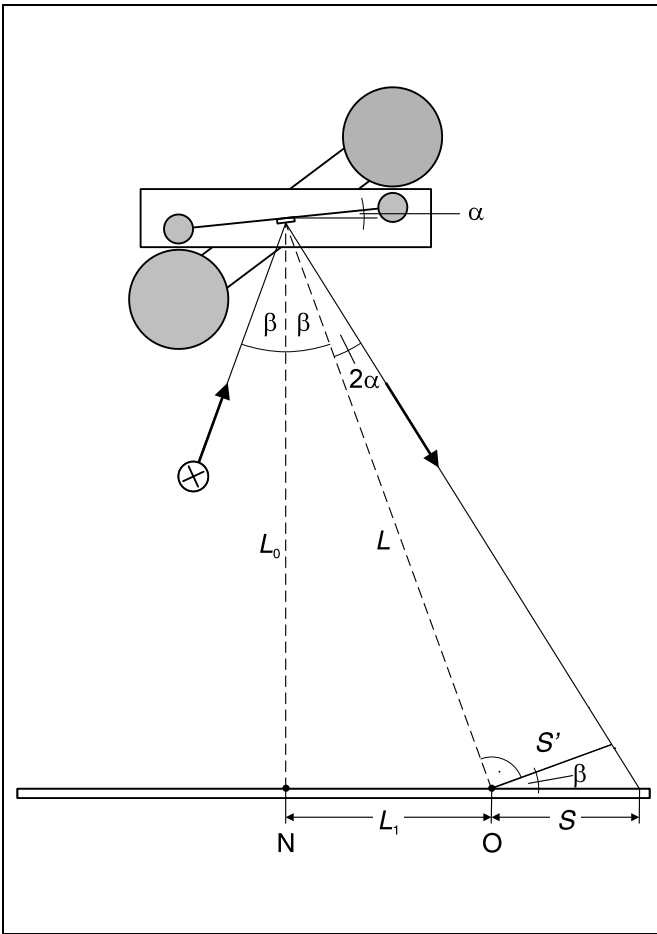
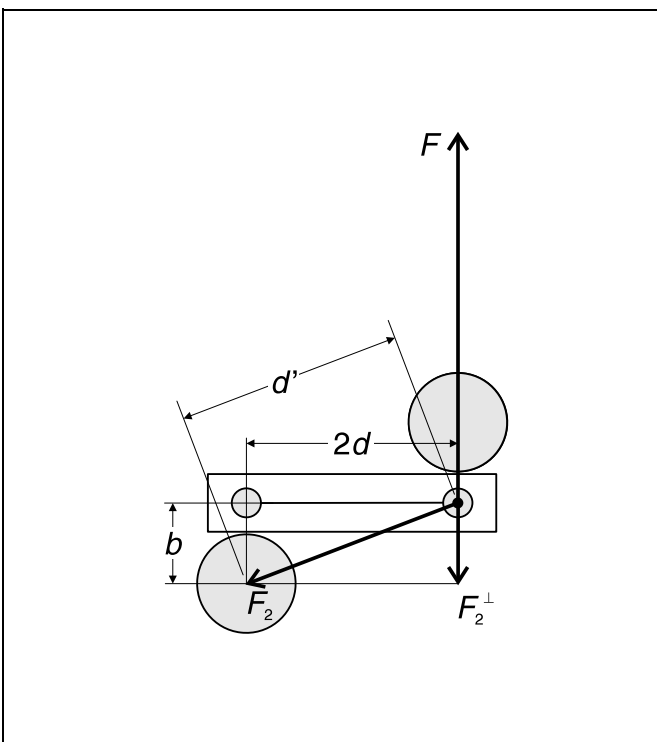


Fig. 2: Schema zur Bestimmung der Auslenkung mit dem Lichtzeiger

Fig. 3: Schema zur Berechnung des Gegendrehmoments durch die „zweite“ Bleikugel



Fall die Ableseskala waagrecht aus und läßt Höhenänderungen des Lichtzeigers unberücksichtigt.

Die Nullage des Torsionspendels, also der Punkt O in Fig. 2, ist in der Regel vor der Versuchsdurchführung nicht bekannt. Zur Bestimmung von L_1 mißt man daher in guter Näherung den Abstand zwischen dem Normalenaufpunkt N und der Lichtzeigerposition für die Gleichgewichtslage I. Diese Näherung ist erlaubt, da $|\alpha| \ll 1$. Bei nicht zu schräger Beleuchtung des Hohlspiegels, also für $\beta \ll 1$, kann $L_1 = 0$ angenommen werden.

Bestimmungsgleichung für die Endausschlagmethode:

Aus (VII) und (IX) erhält man als Bestimmungsgleichung für die Gravitationskonstante:

$$G = \pi^2 \cdot \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{S_I - S_{II}}{T^2} \cdot \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \quad (X)$$

Die Größen $m_1 = 1,5 \text{ kg}$, $d = 50 \text{ mm}$ und $b = 47 \text{ mm}$ sind Gerätekonstanten. Gemessen werden müssen die Schwingungsdauer T des Torsionspendels, der Abstand der beiden Lichtzeigerpositionen S_I und S_{II} für die Gleichgewichtslagen α_I und α_{II} und die Geometrie des Lichtzeigers. Die Bestimmung von S_I bzw. S_{II} wird später in einem Beispiel erläutert.

Gegendrehmoment der „zweiten“ Bleikugel:

Neben dem Drehmoment durch die Anziehungskraft F der jeweils unmittelbar gegenüberliegenden großen Bleikugel (Abstand b) wird ein Gegendrehmoment durch die Anziehungskraft F_2 der jeweils entfernteren Kugel (Abstand d') erzeugt (siehe Fig. 3). Für das Drehmoment M_1 gilt daher genauer als in (II) angegeben

$$M_1 = 2 (F + F_2^\perp) \cdot d,$$

wobei

$$F_2^\perp = -F_2 \cdot \frac{b}{d'}$$

die senkrecht zum Querbalken angreifende Komponente der Kraft

$$F_2 = F \cdot \frac{b^2}{d'^2}$$

ist (siehe (I)). Die Gravitationskonstante G ist daher um den Korrekturfaktor

$$K = \frac{F}{F + F_2^\perp} = \frac{1}{1 - \frac{b^3}{d'^3}} \quad (XI)$$

größer als nach (X) berechnet. Mit

$$d' = \sqrt{(2d)^2 + b^2}$$

berechnet man den Zahlenwert $K = 1,083$.

Beschleunigungsmethode:

Unmittelbar nach dem Umschwenken der großen Bleikugeln aus Position I in Position II übt der verdrehte Torsionsfaden das Rückstellmoment $-M_1$ auf den Querbalken aus, so daß insgesamt das Drehmoment $2M_{II}$ auf den Querbalken wirkt. Es verursacht eine Winkelbeschleunigung

$$\ddot{\alpha} = \frac{2M_{II}}{J},$$

von der man näherungsweise annehmen kann, daß sie in der ersten Minute nach dem Umschwenken konstant bleibt. Während dieser Zeit gilt also

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{M_{II}}{J} \cdot t^2 \quad (XII)$$

Aus (II) , (V) und (XII) erhält man

$$G = \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{\alpha - \alpha_1}{t^2}$$

und berechnet daraus mit (IX)

$$G = \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{S - S_1}{t^2} \cdot \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \quad (XIII)$$

Bei der Beschleunigungsmethode werden also die Änderung $S - S_1$ der Lichtzeigerposition als Funktion der Zeit t und die Geometrie des Lichtzeigers gemessen.

Aufbau

Wichtig: Zufriedenstellende Versuchsergebnisse erfordern eine einwandfreie Justierung des Torsionspendels. Außerdem dürfen die durch die Massenanziehung bewirkten Torsionsschwingungen nicht durch unerwünschte Pendelbewegungen beeinträchtigt werden. Das Torsionspendel reagiert sehr empfindlich auf Erschütterungen, die auf das Gehäuse der Drehwaage übertragen werden. Temperaturschwankungen bewirken Konvektionen im Gehäuse der Drehwaage, die zu unerwünschten Bewegungen des Torsionspendels führen:

Stabilen Aufbau an einer festen Wand wählen.

Experimentierplatz ohne Sonneneinstrahlung und Luftbewegungen wählen.

Beim Umschwenken des Kugelträgers Erschütterungen des Gehäuses etwa durch Anschlagen der Bleikugeln unbedingt vermeiden.

Der Aufbau ist in Fig. 4 dargestellt.

Montage der Drehwaage vor Erstinbetriebnahme:

- 8-mm-Schraube fachgerecht eindübeln, kleinen Stativfuß an seiner Scheitelbohrung aufhängen und mit Hilfe seiner Stellschrauben parallel zur Wand ausrichten (siehe Gebrauchsanweisung)
- Stativstange festklemmen.
- Gravitations-Drehwaage (zunächst ohne die großen Bleikugeln) mit genügend Schwenkraum für den Trägerarm der Bleikugeln festklemmen.
- Gravitations-Drehwaage möglichst genau senkrecht und mit den Glasplatten des Gehäuses parallel zur Wand für die Ableseskala ausrichten.
- Arretierung des Torsionspendels lösen und Ausrichtung korrigieren, bis der Stift am Pendelende zentrisch in der Stielbohrung hängt und das Torsionspendel frei schwingen kann.
- Torsionspendel 1-2 Tage aushängen lassen und ggf. den Nullpunkt justieren (siehe Gebrauchsanweisung).

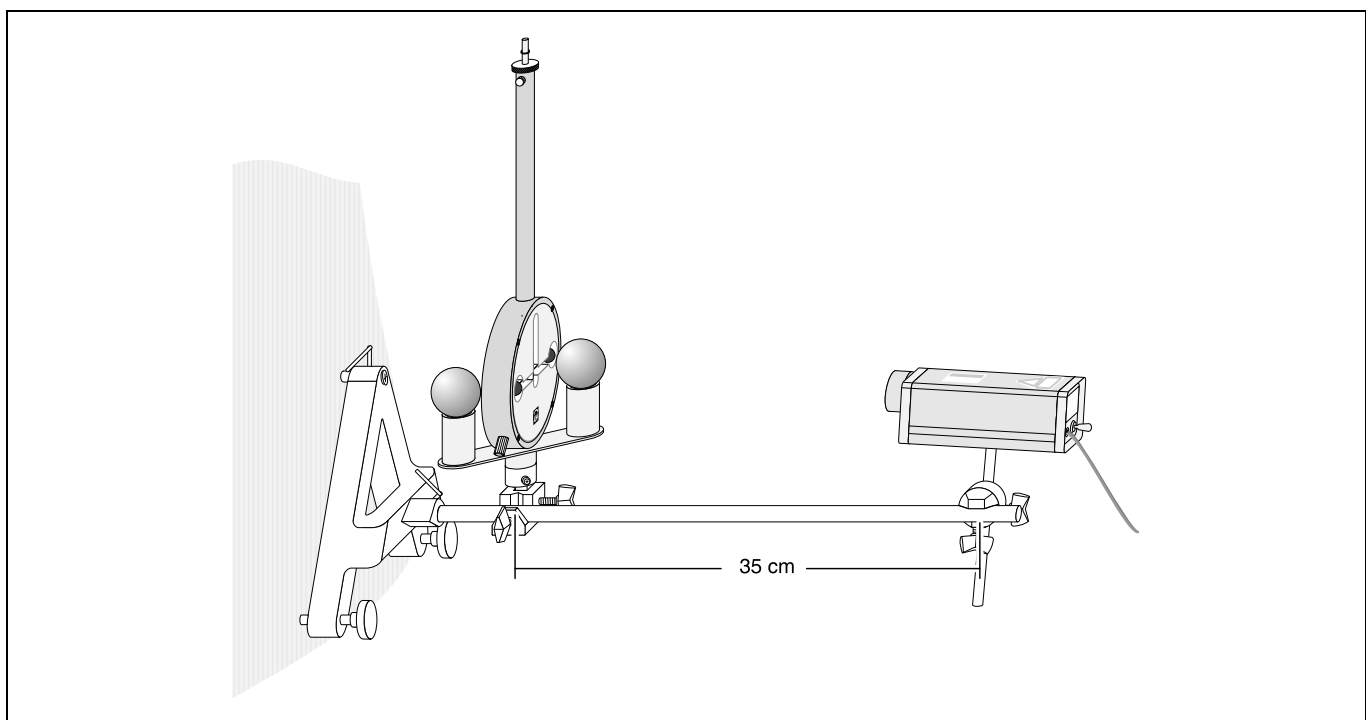
Lichtzeiger:

- Laser mit Drehmuffe in etwa 35 cm Abstand montieren und auf den Hohlspiegel ausrichten; darauf achten, daß die großen Bleikugeln weder in Position I noch in Position II den Strahlengang des Lichtzeigers verdecken können.
- Bleikugeln auflegen und Trägerarm in Position I schwenken.
- Iotrechten Aufbau kontrollieren.

Hinweis: Bei einem Abstand von 10 m zwischen Drehwaage und Skala beträgt der Abstand zwischen den beiden Extremlagen auf der Skala etwa 35 cm, insgesamt überstreicht der Lichtzeiger einen Bereich von etwa 1 m.

- Skala waagrecht so auf die vorgesehene Wand oder auf eine stabile Unterlage kleben, daß die Lichtzeigerposition I bei etwa 35 cm oder die Lichtzeigerposition II bei 65 cm liegt.

Fig. 4: Versuchsaufbau mit Wandbefestigung



Durchführung

zunächst:

- Anordnung mindestens zwei Stunden erschütterungsfrei stehen lassen, so daß das Pendel in die Gleichgewichtslage einschwingen kann (falls die Arretierung nach einer längeren Pause gelöst wird, kann es länger dauern, bis eine stabile Gleichgewichtslage erreicht ist.)
- Stabilität des Nullpunktes kontrollieren.
- Nullpunktsschwankungen über mindestens 10 min beobachten.
- Abstand L_0 des Torsionspendels zur Wand und Abstand L_1 vom Aufpunkt N des Lots zur Position S_I messen (siehe Fig. 2) und notieren.

a) Endausschlagmethode:

- stabile Gleichgewichtslage abwarten; S_I ermitteln und notieren.
- Träger mit den Bleikugeln zügig aber vorsichtig von Position I in Position II schwenken und Stoppuhr starten.
- Stellung des Lichtzeigers auf der Skala über mindestens 3 Schwingungsperioden und mindestens alle 30 s ablesen und notieren.

Alternative Bestimmung von S_I :

- Träger mit den Bleikugeln von Position II in Position I zurückschwenken und Messung wiederholen.

b) Beschleunigungsmethode:

- stabile Gleichgewichtslage abwarten; S_I ermitteln und notieren.
- Träger mit den Bleikugeln zügig aber vorsichtig von Position I in Position II schwenken und Stoppuhr starten.
- Stellung des Lichtzeigers auf der Skala über 1 Schwingungsperiode und mindestens alle 10 s ablesen und notieren.

Meßbeispiel

$L_0 = 6385 \text{ mm}$, $L_1 = 1370 \text{ mm}$

Der Nullpunkt der Skala stimmt nicht (wie in Fig. 1 und 2 angenommen) mit der Lichtzeigerposition für die Nullage des Torsionspendels überein. L_1 ist der Abstand zwischen der Lichtzeigerposition S_I und dem Normalenaufpunkt N.

a) Endausschlagmethode:

$S_I = 650 \text{ mm}$

Tab. 1: Endausschläge S des Lichtzeigers nach dem Umschwenken der großen Bleikugeln in die Position II

Nr.	$\frac{S}{\text{mm}}$
1	248
2	551
3	315
4	496
5	355
6	407
7	405

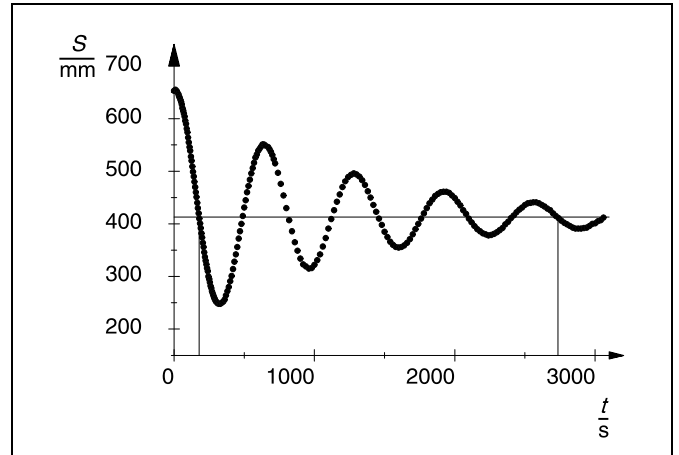


Fig. 5: Schwingungen der Gravitationsdrehwaage um die Endgleichgewichtslage S_I

b) Beschleunigungsmethode:

$S_I = 650 \text{ mm}$

Tab. 2: Lichtzeigerpositionen S in der ersten Minute nach dem Umschwenken der großen Bleikugeln in die Position II

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{S}{\text{mm}}$
0	653
10	655
20	652
30	647
35	643
40	640
45	636
50	632
55	627
60	620

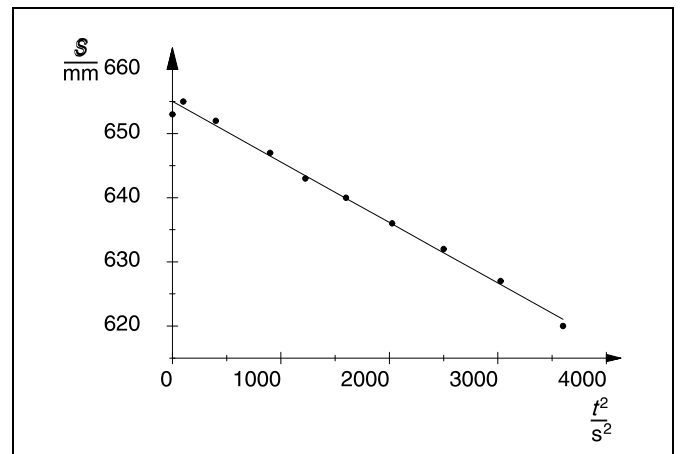


Fig. 6: Lichtzeigerpositionen S als Funktion von t^2 in der ersten Minute nach dem Umschwenken der großen Bleikugeln

Auswertung und Ergebnisse

Gerätekonstanten:

$$m_1 = 1,5 \text{ kg}$$

$$d = 50 \text{ mm}$$

$$b = 47 \text{ mm}$$

$$\text{Korrekturfaktor } K = 1,083$$

a) Endausschlagmethode:

Fig. 5 entnimmt man die Dauer für vier Schwingungsperioden und errechnet daraus $T = 639 \text{ s}$.

Aus den ersten fünf Endausschlägen $S^{(1)} - S^{(5)}$ des Lichtzeigers (siehe Tab. 1) errechnet man die Gleichgewichtslage S_{II} :

$$S_{II} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S^{(1)} + S^{(3)} + S^{(5)}}{3} + \frac{S^{(2)} + S^{(4)}}{2} \right) = 415 \text{ mm}$$

Gleichung (X) liefert ohne Korrektur

$$G = 6,29 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

und mit Korrektur

$$G = 6,81 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$\text{Literaturwert: } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

b) Beschleunigungsmethode:

Fig. 6 zeigt den linearen Zusammenhang zwischen der Position S des Lichtzeigers und dem Quadrat der Zeit t in der ersten Minute nach dem Umschalten. Die Steigung hat den Wert

$$\frac{S_1 - S}{t^2} = 9,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

Gleichung (XIII) liefert ohne Korrektur

$$G = 5,2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

und mit Korrektur

$$G = 5,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Da die Beschleunigung der Bleikugeln durch die Abnahme der Fadentorsion im Laufe der Zeit abnimmt, ist die Geradenanpassung zur Bestimmung des Quotienten

$$\frac{S - S_1}{t^2}$$

mit einem systematischen Fehler behaftet. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß dieser Fehler etwa $-7,5 \%$ beträgt, wenn ein Zehntel der Schwingungsdauer T also etwa 60 s erfaßt werden.

Die Korrektur dieses Fehlers liefert den Wert

$$G = 6,0 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Zusatzinformation

Die Abstandsangabe $b = 47 \text{ mm}$ ist mit der Annahme verbunden, daß sich die kleinen Bleikugeln in der Gehäusemitte befinden und die großen Bleikugeln die Außenwand berühren. Berücksichtigt man bei der Berechnung der Gravitationskraft in (I) die Abstandsänderung durch die Pendelbewegung (in der Gleichgewichtsposition ist der Abstand um $4-5 \text{ mm}$ kleiner), so ändert sich sowohl das Ergebnis für die Gleichgewichtslagen (III) als auch der Zusammenhang zwischen der Winkelrichtgröße D und der Schwingungsdauer T (IV). Eine genaue Rechnung zeigt, daß sich beide Einflüsse gegenseitig aufheben und (VII) in sehr guter Näherung stimmt.

In der Auswertung zu berücksichtigen ist dagegen ein etwaiger Abstand zwischen Außenwand und großen Bleikugeln. 1 mm zusätzlicher Abstand verfälscht das Ergebnis für die Gravitationskonstante um etwa 4% zu größeren Werten. Den Einfluß einer mangelhaften Justierung des Pendelnulldpunkts kann man im Vergleich damit vernachlässigen.