

Drillachse

Satz Zylinder zur Drillachse

Kugel zur Drillachse

Kreisscheibe zur Drillachse

Das Geräteprogramm "Drillachse mit Zubehör" (nach Prof. Pohl) ermöglicht es, die Trägheitsmomente J verschiedener Körper experimentell zu bestimmen. Man setzt dazu Versuchskörper auf eine kugelgelagerte Achse, an der eine Schneckenfeder mit dem Richtmoment D angreift und bestimmt aus der Schwingungsdauer T dieses Drehpendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

die Trägheitsmomente J :

$$J = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T^2 \quad (I)$$

Die Meßwerte bestätigen die Ergebnisse, welche die Theorie für einen Körper der Masse m liefert, deren Masselemente Δm Abstand r_z um eine feste Achse rotieren:

$$J = \sum_{z=1}^n \Delta m_z r_z^2 = \int r^2 dm \quad (II)$$

Die Versuchskörper zur Drillachse sind so ausgewählt, daß sich folgende Themen behandeln lassen:

Untersuchung des Zusammenhangs $J = f(r)$ für einen "Massepunkt", der im Abstand r um eine feste Achse rotiert;

Vergleich der Trägheitsmomente von Zylindern (nahezu gleicher Massen, aber verschiedener Masseverteilung (Zylinderachse als Rotationsachse));

Bestimmung der Trägheitsmomente von Zylinder und Kugel aus gleichem Material, deren Massen und Radien so abgestimmt sind, daß sich gleiche Trägheitsmomente ergeben;

Bestätigung des Steinerschen Satzes.

Literatur: Beschreibungen zum Hauptkatalog Physikversuche „Mechanik“ (599 811).

1. Beschreibung

Zum Lieferumfang der Drillachse (347 80) gehören (Fig. 1):

- ① Drillachse mit zweifach kugelgelagerter Welle, durch eine Schneckenfeder an eine Gabel angekoppelt; auf Stativstab (ϕ 12 mm) zum Aufbau in Stativmaterial (z. B. Stativfuß 300 01 oder Tischklemme 301 06; nicht im Lieferumfang enthalten).
- ② Stab mit Kupplungsstück zum Aufstecken auf die Drillachse; je 5 Kerben in 0,05 m-Abständen zu beiden Seiten der ebenfalls gekerbten Stabmitte.

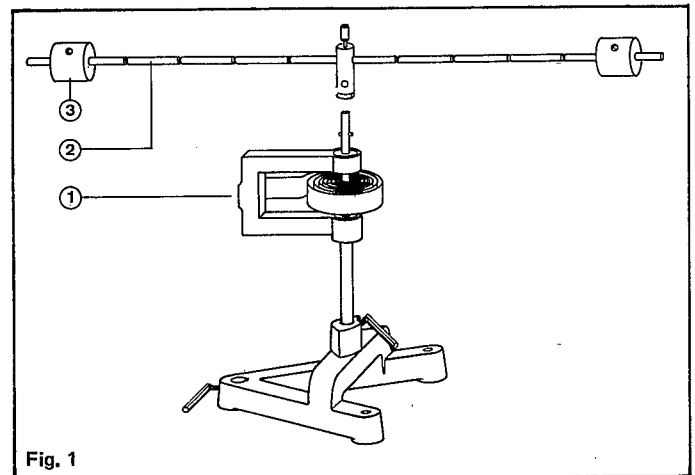


Fig. 1

- ③ Zwei Massen (als Modell von Massepunkten), längs Stab
- ② verschiebbar; mit Kugelrasten, die in die Kerben des Stabes greifen, so daß die Massen in definierten Abständen von der Stabmitte gehalten werden.

Zum Lieferumfang des Satzes Zylinder zur Drillachse (347 81) gehören (Fig. 2):

- ④ Vollzylinder aus Holz, ϕ ca. 225 mm, mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse
- ⑤ Vollzylinder aus Holz, ϕ ca. 90 mm
- ⑥ Hohlzylinder aus Metall, ϕ ca. 90 mm
- ⑦ Aufnahmeteller für die Zylinder ⑤ und ⑥; mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse und mit Schraube zum Fixieren der Zylinder.

Durchmesser und Höhe der Zylinder ⑤ und ⑥ stimmen überein; die Massen der 3 Zylinder ④, ⑤ und ⑥ sind näherungsweise gleich (vgl. Fußnote zu Abschnitt 2).

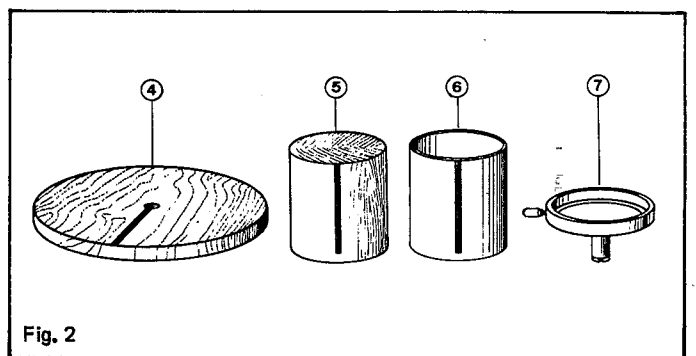


Fig. 2

- ⑧ Kugel aus Holz (347 82), ϕ ca. 145 mm, mit Buchse zum Aufstecken auf die Drillachse (Fig. 3).

Die Trägheitsmomente der Kugel und des Zylinders ④ sind etwa gleich.

- ⑨ Kreisscheibe (347 83), mit Halterung zum Aufstecken auf die Drillachse (Fig. 4):

9 Löcher zum Aufspannen der Scheibe auf der Halterung in der Scheibenmitte sowie im Abstand von 0,02 m; 0,04 m; 0,14 m; 0,16 m von der Scheibenmitte.

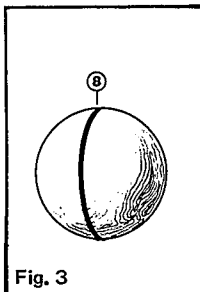


Fig. 3

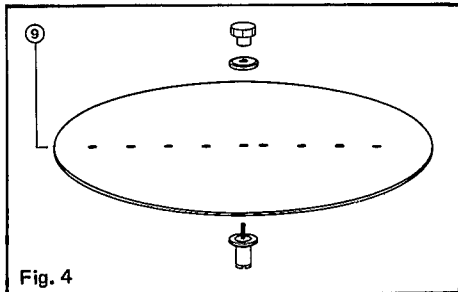


Fig. 4

2. Technische Daten

2.1. Drillachse; Stab mit verschiebbaren Massen (347 80)

Richtmoment der Schneckenfeder:	ca. $0,025 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$
Höhe der Drillachse:	ca. 200 mm
Gewicht der Drillachse:	ca. 0,39 kg
Länge des Stabes:	ca. 600 mm
Masse des Stabes:	ca. 0,13 kg
Masse jedes Massestückes:	ca. 0,24 kg

2.2. Satz Zylinder zur Drillachse (347 81)

Vollzylinder aus Holz (Holzscheibe):

Durchmesser:	ca. 225 mm
Höhe:	ca. 15 mm
Masse: *)	ca. 0,35 kg

Vollzylinder aus Holz:

Durchmesser:	ca. 90 mm
Höhe:	ca. 90 mm
Masse: *)	ca. 0,35 kg

Hohlzylinder aus Metall:

Außendurchmesser:	ca. 90 mm
Innendurchmesser:	ca. 86,6 mm
Höhe:	ca. 90 mm
Masse: *)	ca. 0,35 kg

Aufnahmeteller aus Metall:

Durchmesser:	ca. 100 mm
Masse:	ca. 0,12 kg

2.3. Kugel zur Drillachse (347 82)

Durchmesser:	ca. 145 mm
Masse: *)	ca. 0,96 kg

2.4. Kreisscheibe zur Drillachse (347 83)

Durchmesser:	ca. 400 mm
Masse: *)	ca. 0,74 kg

*) Infolge naturgegebener Inhomogenitäten in der Dichte des Holzes und fertigungstechnisch bedingter Toleranzen in der Wandstärke des Hohlzylinders muß bei den Holzteilen mit Abweichungen von $\pm 5\%$ und beim Hohlzylinder mit Abweichungen von etwa $\pm 2\%$ von den angegebenen Werten gerechnet werden.

3. Hinweise zum Experimentieren

Wichtig:

Schrauben ⑩, welche die federnden Kugelrasten der Massen ③ gegen Stab ② drücken, nicht betätigen! (Fig. 5)

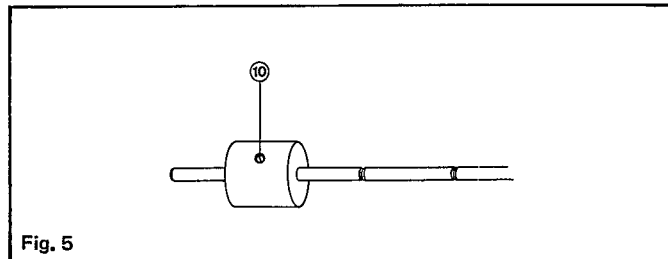


Fig. 5

Die Schrauben sind so eingestellt, daß man einerseits die Massen entsprechend den Versuchsbedingungen längs des Stabes verschieben kann, und daß die Massen andererseits gegen die Zentrifugalkraft auf dem Stab gehalten werden.

Bei der Justierung wurden die Kräfte zugrunde gelegt, die maximal auftreten können, wenn die Drillachse um 360° aus der Gleichgewichtslage gelenkt wird.

Anordnung stets so aus der Gleichgewichtslage auslenken, daß die Feder zusammengedrückt und nicht aufgebogen wird.

Empfehlenswerte Auslenkung zu Beginn des Schwingungsvorgangs: 180° (max. 360°);

Schwingungsdauer zweckmäßigerweise durch Mittelwertbildung aus mehreren Messungen für z. B. 5 Schwingungen bestimmen;

den gemäß Versuch 4.1. ermittelten genauen Wert für das Richtmoment D , das zur Bestimmung des Trägheitsmomentes aus der Schwingungsdauer T erforderlich ist, in der Gebrauchsanweisung (Abschnitt 2) oder auf der Drillachse vermerken.

4. Versuche

Hinweis:

Das Trägheitsmoment der Drillachse liegt in der Größenordnung 10^{-5} kg m^2 . Es ist in den Meßbeispielen nicht berücksichtigt, so daß die experimentell ermittelten Trägheitsmomente stets größer als die theoretisch zu erwartenden Werte sind.

4.1. Bestimmung des Richtmomentes D

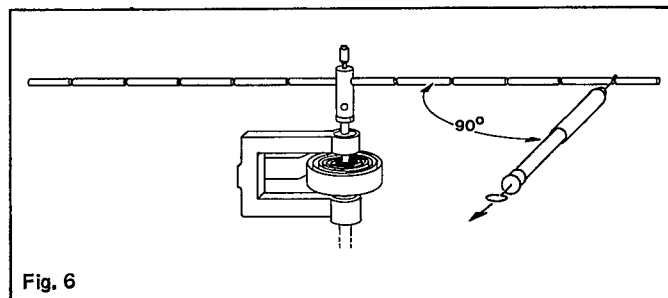


Fig. 6

Drillachse mit Stab gemäß Fig. 6 aufbauen;

mit einem 1-N-Kraftmesser (314 141), der in Abständen r von z. B. 0,1 m, 0,15 m und 0,20 m von der Stabmitte senkrecht am Stab angreift, die Kräfte F bestimmen, die erforderlich sind, um die Anordnung um $\alpha = 180^\circ$ aus der Gleichgewichtslage zu drehen;

Drehmoment $M = F \cdot r$ und Richtmoment $D = \frac{M}{\alpha}$ berechnen.

Meßbeispiel:

$$\alpha = 180^\circ = \pi$$

r	m	0,10	0,15	0,20
F	N	0,81	0,54	0,4
$M = F \cdot r$	Nm	0,081	0,081	0,08
$D = \frac{M}{\alpha}$	$\frac{Nm}{rad}$	0,0258	0,0258	0,0255
D_{Mittel}	$\frac{Nm}{rad}$	0,0257		

4.2. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J vom Abstand r , in dem eine Masse m um eine feste Achse rotiert; Bestätigung von $J \sim r^2$

Zunächst den zum Lieferumfang der Drillachse gehörenden Stab ohne Massen (s. Fig. 1) auf die Achse stecken und dessen Trägheitsmoment J (Stab) bestimmen;

Massen symmetrisch im Abstand $r = 0,05 \text{ m}; 0,1 \text{ m}; 0,15 \text{ m}; 0,20 \text{ m}; 0,25 \text{ m}$ von der Stabmitte anordnen und J (Stab + Massen) ermitteln;

J (Massen) = J (Stab + Massen) - J (Stab) ausrechnen;

Meßbeispiel:

Trägheitsmoment des Stabes
 $T = 2,52 \text{ s}$ (Mittelwert)

$$J(\text{Stab}) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T^2$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0,0257 \cdot 2,52^2 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2$$

$$= 0,414 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

(Schnittpunkt der Geraden J (Stab + Masse) = $f(r^2)$ mit der J -Achse, vgl. Fig. 7)

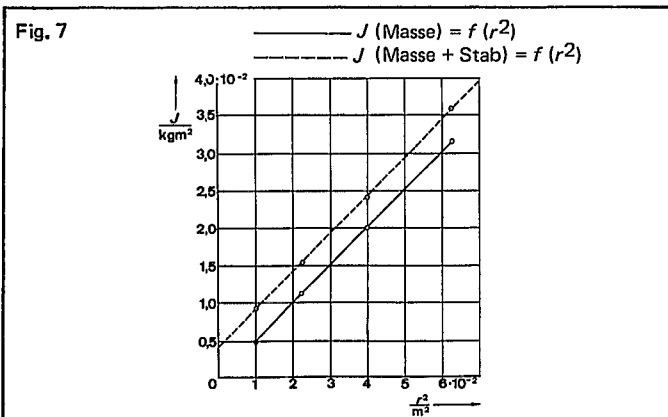
Theoretisch zu erwartender Wert (aus II):

$$J(\text{Stab}) = \frac{1}{12} m l^2 \quad \text{mit } l = 0,6 \text{ m}; m = 0,132 \text{ kg}$$

$$= 0,396 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

Trägheitsmoment der Massen:

r	m	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
T	s	2,71	3,756	4,86	6,084	7,4
$J(\text{Stab} + \text{Masse})$	$\text{kg m}^2 \cdot 10^{-2}$	0,478	0,919	1,539	2,414	3,568
J (Massen)	$\text{kg m}^2 \cdot 10^{-2}$	0,064	0,505	1,125	2,000	3,154
r^2	$\text{m}^2 \cdot 10^{-2}$	0,25	1,00	2,25	4,00	6,25
$\frac{J}{r^2}$ (aus Fig. 7)	kg	0,503				



4.3. Vergleich der Trägheitsmomente von Zylindern gleicher Masse*) mit verschiedener Masseverteilung

4.3.1. Vollzylinder aus Holz, ϕ ca. 225 mm (Holzscheibe HS)

$$T = 1,82 \text{ s}$$

$$J(\text{HS}) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0,0257 \cdot 1,82^2 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2$$

$$= 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

theoretisch zu erwartender Wert (aus II):

$$J(\text{HS}) = \frac{1}{2} m R^2 \quad \text{mit } m = 0,333 \text{ kg}$$

$$= 2,05 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad R = 0,111 \text{ m}$$

4.3.2. Vollzylinder (VZ) und Hohlzylinder (HZ)

Beide Zylinder werden auf einen Aufnahmeteller (T) gesetzt, so daß sich die Trägheitsmomente $J_{(\text{VZ})}$ und $J_{(\text{HZ})}$ nicht unmittelbar experimentell, sondern durch Differenzbildung ermitteln lassen:

$$J_{(\text{VZ})} = J_{(\text{VZ} + \text{T})} - J_{(\text{T})}$$

$$J_{(\text{HZ})} = J_{(\text{HZ} + \text{T})} - J_{(\text{T})}$$

Aufnahmeteller (T):

$$T = 0,564 \text{ s}$$

$$J_{(\text{T})} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0,0257 \cdot 0,564^2 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2$$

$$= 0,207 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Aufnahmeteller + Vollzylinder:

$$T = 0,92 \text{ s}$$

$$J_{(\text{T} + \text{VZ})} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0,0257 \cdot 0,92^2 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2$$

$$= 0,552 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Vollzylinders $\phi 90 \text{ mm}$

$$J_{(\text{VZ})} = J_{(\text{T} + \text{VZ})} - J_{(\text{T})} = 0,345 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

theoretisch zu erwartender Wert (aus II):

$$J_{\text{th}} = \frac{1}{2} m R^2 \quad \text{mit } m = 0,339 \text{ kg}$$

$$= 0,337 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad R = 0,0446 \text{ m}$$

Aufnahmeteller + Hohlzylinder

$$T = 1,18 \text{ s}$$

$$J_{(\text{T} + \text{HZ})} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0,0257 \cdot 1,18^2 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2$$

$$= 0,907 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders ergibt sich:

$$J_{(\text{HZ})} = J_{(\text{T} + \text{HZ})} - J_{(\text{T})} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

theoretisch zu erwartender Wert (aus II):

$$J_{\text{th}} = \frac{1}{2} m (R_o^2 - R_i^2) \quad \text{mit } m = 0,351 \text{ kg}$$

$$= 0,652 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad R_o = 0,045 \text{ m}$$

$$R_i = 0,0431 \text{ m}$$

Zusammenfassung

		Vollzylinder $\phi 222 \text{ mm}$	Vollzylinder $\phi 89,2 \text{ mm}$	Hohlzylinder
J , experimentell	$\text{kg m}^2 \cdot 10^{-3}$	2,16	0,345	0,700
J , theoretisch	$\text{kg m}^2 \cdot 10^{-3}$	2,05	0,337	0,652

*) vgl. Fußnote zu Abschnitt 2

4.4. Trägheitsmoment einer Kugel

$$T = 1,82 \text{ s}$$

$$J = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 0,0257 \cdot 1,18^2 \text{ Nm} \cdot \text{s}^2$$

$$= 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

theoretisch zu erwartender Wert (aus II):

$$J_{th} = \frac{2}{5} m R^2 \quad \text{mit } m = 0,97 \text{ kg}$$

$$= 2,05 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad R = 0,0726 \text{ m}$$

Aus dem Vergleich mit Versuch 4.3.1. ergibt sich:

$$J_{(Kugel)} = J_{(Holzscheibe)}$$

Bestimmt man Massen und Radien der Versuchskörper, so läßt sich experimentell bestätigen:

Kugel K und Holzscheibe HS haben gleiches Trägheitsmoment, wenn gilt:

$$m_{HS} \cdot R_{HS}^2 = \frac{4}{5} m_K \cdot R_K^2$$

4.5. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J vom Abstand a zwischen Rotations- und Schwerpunktachse; Bestätigung des Steinerschen Satzes $J = J_0 + m a^2$

Drillachse wie in Fig. 8 in einem großen Stativfuß (300 01) befestigen, so daß eine Horizontaljustierung der Kreisscheibe mit Hilfe der Stellschrauben (a) möglich ist; zur elektronischen Bestimmung der Schwingungsdauer Meßvorrichtung aus Gabellichtschranke (337 46), Torsteuerung (575 51) und Elektronische Stoppuhr P (313 03) gemäß Fig. 8 aufbauen.

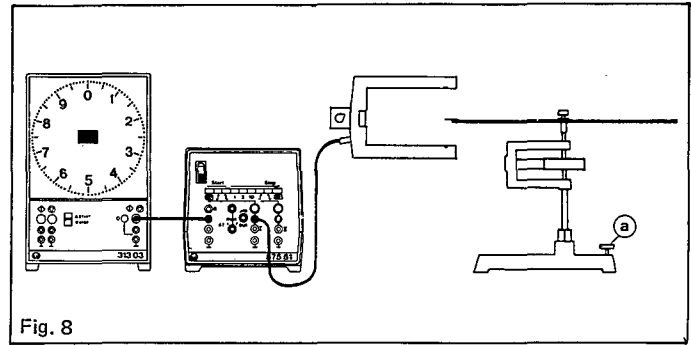


Fig. 8

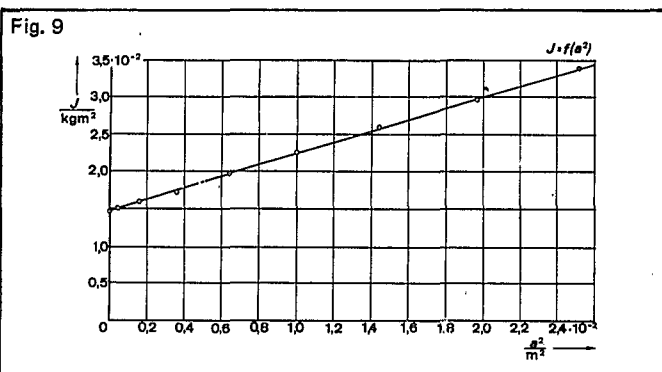
Kreisscheibe zunächst um ihre Schwerpunktachse rotieren lassen ($a = 0$); nach einer Auslenkung um 180° aus der Gleichgewichtslage Zeit für z. B. 5 Schwingungen bestimmen; Messung zur Verbesserung der Genauigkeit mehrmals durchführen (insbesondere bei Verwendung einer Stoppuhr) und Schwingungsdauer T durch Mittelwertbildung berechnen; in gleicher Weise Schwingungsdauer T bestimmen, wenn der Abstand a zwischen Rotations- und Schwerpunktachse $0,02 \text{ m}$, $0,04 \text{ m}$, ... $0,14 \text{ m}$ und $0,16 \text{ m}$ beträgt.

Wichtig:

Nach jeder Änderung von a Kreisscheibe an den Stellschrauben (a) in die Horizontale justieren (Dosenlibelle 361 05).

Meßbeispiel:

a	m	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
a^2	$\text{m}^2 \cdot 10^{-2}$	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96	2,56
T	s	4,782	4,800	4,961	5,230	5,532	5,884	6,313	6,71	7,22
T^2	s^2	22,868	23,04	24,612	27,353	30,603	34,621	39,853	45,293	52,128
$J = \frac{1}{4\pi^2} T^2 \cdot D$ ($D = 0,0257 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$; aus 4.1)	$\text{kg m}^2 \cdot 10^{-2}$	1,49	1,501	1,604	1,782	1,994	2,256	2,597	2,951	3,400
$\frac{J - J_0}{a^2}$ (aus Fig. 9)	kg	0,75								



Ergebnis:

Für das Trägheitsmoment J eines Körpers der Masse m , dessen Rotationsachse um a von der Schwerpunktachse entfernt ist, gilt (s. Fig. 9):

$$J = J_0 + \text{const.} \cdot a^2$$

Die Auswertung des Diagramms $J = f(a^2)$ liefert für den konstanten Proportionalitätsfaktor in befriedigender Übereinstimmung mit der Masse der Kreisscheibe $0,75 \text{ kg}$.

Damit bestätigt der Versuch den Steinerschen Satz:

$$J = J_0 + m a^2$$